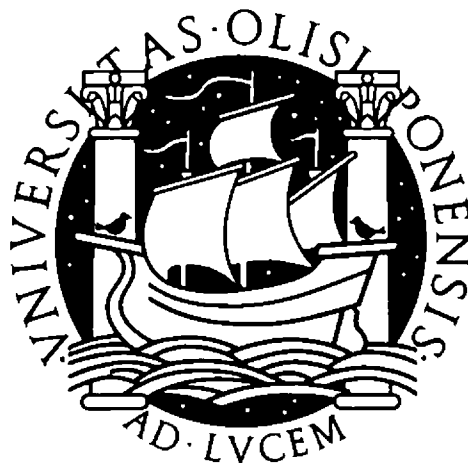


**UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO**



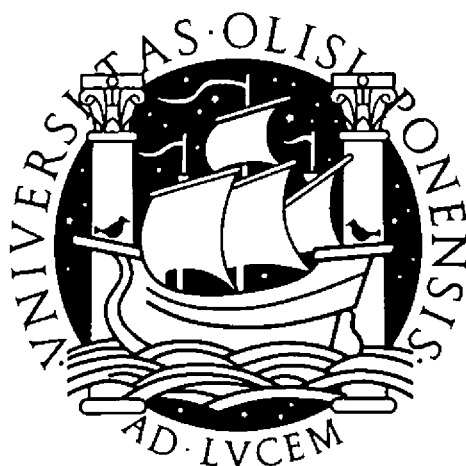
**ACTIVIDADES INVESTIGATIVAS NA APRENDIZAGEM
DA ANÁLISE NUMÉRICA:
UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO SUPERIOR**

Ana Cláudia Correia Batalha Henriques

**MESTRADO EM EDUCAÇÃO
(ÁREA DE ESPECIALIZAÇÃO EM DIDÁCTICA DA MATEMÁTICA)**

2006

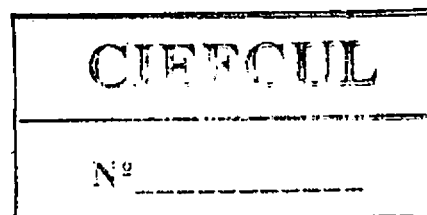
UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO



ACTIVIDADES INVESTIGATIVAS NA APRENDIZAGEM
DA ANÁLISE NUMÉRICA:
UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO SUPERIOR

Dissertação Apresentada para Obtenção do Grau de Mestre em Educação
na Especialidade de Didáctica da Matemática

Orientada pelo Prof. Doutor João Pedro Mendes da Ponte



Ana Cláudia Correia Batalha Henriques

2006

Resumo

A introdução das actividades de investigação nas disciplinas de Matemática no ensino superior, como metodologia de ensino-aprendizagem, coloca desafios aos docentes e às crenças estabelecidas relativamente ao modo de entender o ensino da Matemática e a aprendizagem dos alunos. Apesar da literatura evidenciar as potencialidades deste tipo de actividades na sala de aula, os dados de investigação continuam a ser insuficientes para fundamentar a sua implementação, sobretudo neste nível de ensino.

O processo de inovação pedagógica posto em prática no presente estudo é suportado pela realização de actividades investigativas nas aulas de Análise Numérica e tem por objectivo compreender quais os processos matemáticos utilizados pelos alunos na resolução destas actividades e os factores que os influenciam em termos da natureza das tarefas, do ambiente de trabalho na sala de aula e das perspectivas, conhecimentos e motivações dos alunos. Constituiu ainda uma preocupação relevante do estudo perceber o valor e a exequibilidade das actividades de investigação na promoção das suas aprendizagens.

O estudo usou uma abordagem de investigação qualitativa baseada em estudos de caso. Os participantes foram todos os alunos do 2.º ano dos cursos de licenciatura da Escola Naval, a frequentar a disciplina de Análise Numérica. Analisou-se o trabalho das duas turmas, em torno da realização das mesmas quatro tarefas investigativas e, dentro de cada turma, estudou-se um grupo em particular. A investigadora foi também a docente que implementou as actividades de investigação. Os dados foram recolhidos, ao longo do 1.º semestre do ano lectivo de 2005/06, utilizando observação participante, registos áudio do trabalho dos grupos analisados, relatórios de investigação elaborados pelos alunos, entrevistas realizadas após as tarefas e questionários.

Nas tarefas de tipo investigativo os alunos envolveram-se mais activamente nas actividades do que o habitual. Dos processos matemáticos analisados, a especialização e a formulação e teste de conjecturas foram aqueles que surgiram mais autónoma e frequentemente durante as suas actividades. Já os processos de justificação e demonstração tiveram uma presença reduzida. No entanto, evidencia-se o facto de, ao longo da experiência, todos os alunos terem, gradualmente, tomando conhecimento dos vários processos matemáticos de que se podem servir para progredir na exploração deste tipo de tarefas. No que diz respeito aos factores que podem influenciar a utilização dos processos matemáticos, destacaram-se a natureza da tarefa, o trabalho de grupo, a atitude da professora e a utilização da máquina de calcular. Os dados recolhidos mostram ainda que a implementação das actividades investigativas teve um papel importante na mudança de postura e atitude dos alunos face à Matemática e permitiram explorar uma grande diversidade de temas do programa da Análise Numérica, contribuindo, desta forma, para o desenvolvimento de aprendizagens significativas. Finalmente, os resultados obtidos nesta experiência conduzem a uma avaliação positiva do papel que poderão desempenhar as actividades de investigação na aprendizagem dos alunos, nomeadamente no domínio da Análise Numérica, e sugerem a possibilidade da sua integração na sala de aula, como metodologia alternativa à convencional.

Palavras-chave: Actividades de investigação; Ensino superior; Análise Numérica

Abstract

The literature has shown the potentialities of the investigative activities in the mathematics learning. In spite that, research data remains insufficient for the efficient implementation of this kind of activities, mainly in the higher education.

The process of pedagogical innovation that was carried out in the present study is supported by investigative activities, worked out in the Numerical Analysis classes. The main aim of the study is trying to understand the mathematical processes used by students when exploring this kind of activities and the factors that could influence them. It was also a concern to understand which implications in learning promotion result from the development of this type of activity.

The study stands on a qualitative methodology based on case studies. The participants were all the Numerical Analysis students of the 2nd year of Naval School courses. Both classes were involved on the same four tasks, but only one group of each class was observed. The researcher was also the teacher that implemented the tasks. Data was gathered during the 1st semester of 2005/06 and data collection methods included participant observation, audio tape recording of work carried out in the classes by the observed groups, the written reports produced by students, interviews to the analysed groups and questionnaires.

The results reveal that in the investigative activities, the students were more actively involved than they usually did. From the analysed mathematical processes, the specialization and the formulation and test of conjectures, were the most frequent in the students work. Otherwise, the justification and proof had a reduced presence. The biggest evidence concerns the fact that during the process, all the students have gradually known what mathematical ideas are and the type of mathematical processes they could use to progress in the exploration of the proposed investigative tasks. The nature of the task, the group work, the teacher attitude and the calculator were some of the identified factors that had influence on the mathematical processes used by students.

This study also concludes that the introduction of investigative activities influences the evolution of students' conceptions about mathematics and may work as an alternative for students' knowledge acquisition. A continuous experience in exploring mathematical investigations has several potentialities in the students learning and is adequate to be used as a methodology of teaching and learning process.

Key words: Investigative activities; Higher education; Numerical Analysis

Agradecimentos

Ao meu orientador, pelos seus ensinamentos e pelas críticas pertinentes, pela grande disponibilidade que sempre manifestou e, em particular, pelo seu enorme apoio no acesso ao material bibliográfico utilizado neste estudo.

Aos alunos do curso Almirante Robredo e Silva envolvidos nesta investigação, pela simpatia, empenho e total abertura com que se dispuseram a colaborar.

Ao Nuno, pela compreensão nos meus (muitos) momentos de indisponibilidade.

Índice Geral

CAPÍTULO 1	3
Introdução	3
Enquadramento e pertinência do estudo.....	3
Problema e questões do estudo.....	5
CAPÍTULO 2	7
Raciocínio matemático e actividades de investigação	7
Raciocínio matemático	7
Actividades de investigação	16
Pedagogia no ensino superior.....	24
CAPÍTULO 3	31
Proposta Pedagógica	31
O projecto de intervenção pedagógica	31
Planeamento e caracterização das tarefas de investigação	34
Instrumentos de avaliação	39
CAPÍTULO 4	42
Metodologia	42
Opções metodológicas.....	42
Técnicas e procedimentos de recolha de dados.....	45
Participantes	51
Procedimentos de análise de dados	52
CAPÍTULO 5	55
Descrição da Experiência.....	55
Início da experiência	55
As aulas com tarefas investigativas.....	56
Aulas expositivas e de resolução de exercícios.....	64
A avaliação e classificação dos alunos.....	65
Balanço final	67
CAPÍTULO 6	70
Estudo Caso dos grupos A e B.....	70
Caso do Grupo A.....	70
Caso do Grupo B.....	88
CAPÍTULO 7	106
Aprendizagens em Análise Numérica e Concepções dos Alunos	106
Introdução.....	106
Influência das actividades investigativas nas concepções dos alunos.....	107
Opiniões dos alunos sobre a experiência.....	117
Síntese de resultados	124
CAPÍTULO 8	126
Conclusões e Recomendações.....	126
Conclusões do estudo.....	126
Recomendações e propostas de trabalho futuro	134

Reflexão final	138
Referências	140
Anexos	145
Anexo 1 – Planeamento das Actividades Lectivas.....	146
Anexo 2 - Tarefa 1	148
Anexo 3 - Tarefa 2	150
Anexo 4 - Tarefa 3	152
Anexo 5 - Tarefa 4	153
Anexo 6 – Guião dos Relatórios	154
Anexo 7 – Tabela de Descritores	156
Anexo 8 – Questionário Inicial	158
Anexo 9 – Questionário Final	160
Anexo 10 – Guião da entrevista	163

CAPÍTULO 1

Introdução

Enquadramento e pertinência do estudo

Tem-se vindo a verificar uma tendência crescente no índice de reprovações nas disciplinas básicas dos cursos universitários, nas áreas das ciências exactas, em especial nas disciplinas de Matemática. As queixas sistemáticas dos professores universitários no sentido de que os alunos chegam ‘mal preparados’ indicam que ainda se acredita que o problema deste insucesso se deve essencialmente à deteriorização do ensino pré-universitário e, por isso, a única acção possível é efectuar uma selecção mais eficiente para o ingresso na universidade. No entanto, uma taxa de reprovação alta, em disciplinas de base, é apenas um sintoma de que existem dificuldades de aprendizagem. A causa tanto pode ter a ver com a preparação dos alunos como também com os programas demasiado ambiciosos e métodos de ensino inadequados.

A abordagem típica na sala de aula no ensino superior faz uso do modelo tradicional de explicar/praticar. Há primeiramente uma aula teórica, consistindo na exposição por parte de um professor, cuja intenção é transmitir o conhecimento ao aluno. O conhecimento matemático é apresentado sob a forma de regras e fórmulas, informações sobre definições, teoremas (resultados) e linguagem simbólica. A seguir, numa aula prática, ou teórico-prática, o aluno tem a oportunidade de aplicar e praticar o uso do conhecimento supostamente adquirido através da execução de exercícios. Desta forma previlégia-se o ensino e não a aprendizagem. Eu não sou excepção e enquanto docente, tenho usado largamente o método expositivo no que considerava ser o modelo tradicional de ensino, o único que até há pouco conhecia e que, pensava eu, se ajustava à minha realidade.

Como referem Conboy, Fonseca e Gama (2002), o desenvolvimento de um estilo de ensino está sujeito a hábitos que estão enraizados na experiência do próprio professor enquanto aluno, não tendo por base uma consideração reflectida das necessidades de aprendizagem dos seus alunos. O abandono de práticas pedagógicas consolidadas é muito difícil, sobretudo quando os docentes, tanto do ensino superior,

como de outros níveis de ensino, não tiveram a formação pedagógica necessária para identificar e compreender um conjunto inteiramente novo de concepções sobre o ensino e a aprendizagem que se tem vindo a desenvolver nas últimas décadas.¹

Ao acumular a responsabilidade docente com a coordenação pedagógica e científica de diversas disciplinas, surgiram-me dúvidas sobre o porquê da grande parte dos alunos chegarem ao ensino superior conhecendo apenas a Matemática escolar e a sua experiência neste campo não ir além da utilização do manual e do caderno. Estes alunos verbalizam conceitos e conseguem realizar procedimentos, mas não lhe dão significado uma vez que não compreendem o que se pede nem o modo como podem resolver as questões propostas. Esta situação traduz-se frequentemente em desempenhos escolares de médio e baixo nível e culmina numa insatisfação generalizada dos alunos e na dificuldade de relacionar ou perceber a utilidade, para a prática futura, de conteúdos programáticos de Matemática. Pergunto-me porque é que os alunos não estão a adquirir competências e conhecimentos básicos, esquecem facilmente o que lhes é ensinado e sentem-se desmotivados face aos conteúdos e tarefas escolares. Questiono-me ainda sobre que aptidões/competências devem os alunos adquirir que lhes permitam um desempenho profissional compatível com as expectativas que sobre eles recaem.

Esta realidade coloca-me à procura de estratégias pedagógicas alternativas adequadas, que visem construir ambientes de aprendizagem que levem o aluno a: (i) reconhecer a Matemática na sua vida e compreender o uso que dela fazem, (ii) a construir o seu saber, baseado nas suas experiências prévias e nas que vai adquirindo no convívio com o seu mundo académico e com situações da sua área profissional e da sua vida quotidiana. Para isso, o trabalho na aula deve envolver os alunos em tarefas que lhes permitam partir das suas concepções e experiências na construção do saber matemático, usando um conjunto de ferramentas que sustentem a construção de conhecimentos significativos.

Deste modo, considero que também no ensino universitário é preciso mudar a concepção do que seja ensinar e aprender e dos papéis do professor e do aluno, neste processo. Para ensinar, não é suficiente expor e dar informações, mas, principalmente, incentivar o aluno a pensar, a fazer conjecturas, a ler e interpretar informações e, com base nelas, deduzir formas de resolver problemas, interagindo com colegas, reflectindo sobre as acções desenvolvidas e tomando decisões. Da mesma forma, aprender não se

¹ Note-se que não pretendo ajuizar sobre os procedimentos de professores ou alunos, mas questionar os problemas reais com que me deparo nas minhas aulas.

pode limitar à aquisição de conhecimentos factuais e processuais. Deve ser um processo de desenvolvimento de competências e capacidades que permitam o uso correcto desses conhecimentos e processos na resolução de situações concretas.

Preparar jovens autónomos, capazes de lidar com a realidade actual, caracterizada por uma constante mudança, exige o abandono de práticas pedagógicas consolidadas e é uma tarefa que requer uma reflexão profunda e permanente por parte do professor. Senti, assim, o interesse em experimentar uma proposta pedagógica suportada pela realização de actividades de investigação, que fosse simultaneamente uma inovação e um desafio na minha prática lectiva. A oportunidade surgiu na disciplina de Análise Numérica. A exploração de situações e actividades onde a discussão e a reflexão acerca dos dados e do contexto onde surgem, é um meio, por excelência, para a construção de significados e conceitos abordados no tópicos de Análise Numérica.

A investigação educacional, nos últimos anos, tem dado muitas contribuições no sentido de se caminhar para uma melhor compreensão dos problemas do ensino-aprendizagem, em todos os níveis, propondo e desenvolvendo metodologias e acções para promover a aprendizagem de uma forma cada vez mais eficiente. Apesar da literatura da especialidade ser rica em trabalhos centrados nesta problemática, os dados de investigação continuam insuficientes para fundamentar o modo de os pôr em prática de forma adequada, em especial no ensino superior. Por esta razão, considero que os resultados deste estudo podem ter interesse para uma comunidade alargada de professores deste nível de ensino.

Problema e questões do estudo

Os estudos que têm sido realizados confirmam as potencialidades das actividades de investigação na sala de aula. Este facto e o contexto acima referido, leva-me a considerar a hipótese desta metodologia ser adequada para usar em alternativa ou em complemento das metodologias transmissivas tradicionalmente utilizadas, conduzindo assim a uma progressiva inovação em disciplinas específicas de cursos superiores de natureza tecnológica.

Pretendo com este estudo compreender quais os processos matemáticos utilizados pelos alunos na resolução de actividades de exploração/investigação e os factores que influenciam esses processos em termos de natureza das tarefas, do

ambiente de trabalho na sala de aula e das perspectivas, conhecimentos e motivações dos alunos.

Para responder a estes objectivos tentarei abordar as seguintes questões:

- (1) Quais as principais dificuldades reveladas pelos alunos na realização de actividades de exploração/investigação?
- (2) De que forma a aprendizagem de tópicos de Análise Numérica pode ser influenciada pela realização de actividades de exploração/investigação?
- (3) De que maneira os alunos constroem argumentações matemáticas (raciocinam)?
- (4) Qual o impacto das actividades de exploração/investigação nas concepções de Matemática dos alunos?

A partir dos resultados desta experiência, pretendo ainda, naturalmente, reflectir sobre o valor e a exequibilidade deste tipo de actividades numa disciplina de Matemática do ensino superior.

CAPÍTULO 2

Raciocínio matemático e actividades de investigação

Raciocínio matemático

Neste capítulo começo por fazer uma abordagem alargada ao que significa pensar matematicamente e sumariar o que alguns autores referem sobre a temática, passando depois a explorar literatura relevante sobre os processos matemáticos, em particular aqueles que se podem encontrar na realização de investigações matemáticas.

O que é pensar matematicamente?

Nos últimos anos são vários os autores que se têm debruçado sobre a natureza do pensamento matemático, referenciado como um processo dinâmico necessário para compreender e utilizar ideias de carácter geral, não necessariamente contextualizadas na Matemática. Esta atenção ao pensamento matemático tem por base uma distinção entre a Matemática como actividade humana e a Matemática como corpo de conhecimentos em que se evidenciam conteúdos e técnicas (Freudenthal, 1973; Burton, 1984).

O pensamento é o meio usado pelos humanos para melhor compreender o seu meio ambiente e para exercer algum controlo sobre o mesmo. O estilo de pensamento usualmente denominado de matemático pode ser usado em qualquer contexto pois esta designação não advém do facto de se pensar sobre Matemática mas porque as operações utilizadas são operações matemáticas. Assim, Burton (1984) define pensamento matemático como um estilo de pensamento que envolve as operações, processos e dinâmicas reconhecidas como matemáticas mas que é pertinente qualquer que seja o conteúdo a que seja aplicado, embora as questões de natureza matemática estejam mais expostas a ele. Para a autora, o pensamento matemático é um processo natural através do qual classificamos, reunimos, relacionamos e transformamos informação.

Numa perspectiva semelhante, Goldenberg (1999) considera que a “Matemática não é nenhum desvio ao pensamento humano normal, mas uma elaboração, refinamento, alargamento e um particularmente específico exemplo desse pensamento”

(p. 36). Defende ainda que não nos deve surpreender o facto dos modos de pensar matemáticos serem válidos em todos os domínios e constituírem um poderoso instrumento para ver e compreender o mundo para a grande maioria de pessoas.

Ao lado de um rico legado de aplicações, a história multimilenar da Matemática apurou igualmente para nosso uso um corpo de métodos e modos de pensar que são tão valiosos como os factos que esses modos de pensar nos ajudam a descobrir. (Goldenberg, 1999, p. 36).

O pensamento matemático é assim visto como um modo de proceder que não se limita à exploração de problemas matemáticos ou científicos mas que envolve problemas de carácter mais geral. Segundo Mason, Burton e Stacey (1982/88), é através dele que temos uma visão mais coerente do que sabemos, permite-nos uma investigação mais eficaz do que queremos saber e uma avaliação mais crítica daquilo que vemos.

A natureza do raciocínio matemático é também abordada por Pólya (1954). O autor considera que existem dois tipos de raciocínio matemático, o demonstrativo e o plausível. O primeiro é usado para assegurar o conhecimento matemático enquanto que o segundo suporta conjecturas que dão origem a esse conhecimento. O autor afirma ainda que o raciocínio plausível pode ser indutivo ou analógico, sendo que a indução nos permite examinar as consequências de uma conjectura e as analogias levam-nos a relacionar essas mesmas conjecturas.

Com base nestas ideias surge também o conceito de raciocínio adaptativo como sendo “a capacidade para pensar logicamente sobre as relações entre conceitos e situações” (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, p. 129). Kilpatrick (2005) refere que muitas concepções de raciocínio matemático estão confinadas à prova formal e outras formas de raciocínio dedutivo e defende o raciocínio adaptativo como sendo “mais abrangente, incluindo não só explicações informais e justificações mas também raciocínio intuitivo e indutivo baseado em padrões, analogias e metáforas” (p. 112).

No modelo descritivo da dinâmica do pensamento matemático apresentado por Mason, Burton e Stacey (1982/88), o processo de pensamento matemático começa pela manipulação de uma ideia, objecto, símbolo ou diagrama que provocou alguma curiosidade e, essa manipulação, à medida que vai sendo feita, vai inspirando cada vez mais confiança. Depois, o vazio que surge entre aquilo que é esperado da manipulação e o que realmente acontece provoca uma tensão que permite manter e conduzir o processo

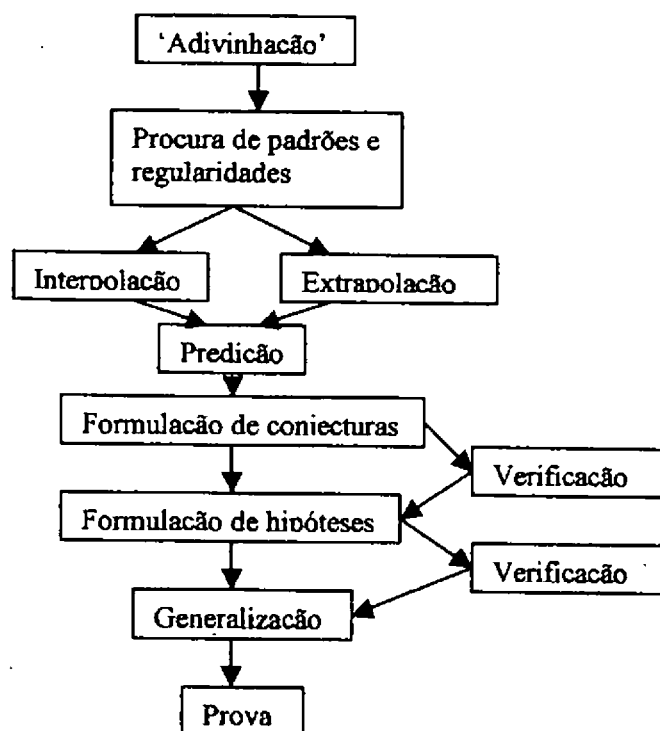
até que se alcance a compreensão de algum padrão ou que a desconexão liberte a tensão em conquista, espanto ou curiosidade adicional. Embora esta compreensão possa ser vaga, mais manipulação ajudará à sua articulação simbólica que, uma vez alcançada, torna-se disponível para nova manipulação. O pensamento matemático pode assim ser visto como um movimento em torno de um número indefinido de voltas, onde cada volta é construída com base nas compreensões e conhecimentos adquiridos na volta anterior. Desta forma vai-se tornando cada vez mais complexo, embora a ligação existente entre as voltas permita o regresso aos níveis anteriores e a recriação das manipulações que entretanto se tornaram instáveis.

Tendo em conta as visões convergentes dos vários autores apresentados, parece-me que o pensamento matemático pode ser considerado um processo mental complexo, construído com base em compreensões e conhecimentos adquiridos e que permite a exploração de problemas de carácter geral.

Processos matemáticos

O pensamento matemático, entendido como processo mental, não pode ser directamente observado. No entanto, a partir de manifestações observáveis do pensamento matemático podemos inferir alguns processos característicos da actividade matemática e, em particular, das investigações matemáticas. Não é possível fazer uma lista completa destes processos uma vez que cada autor dá destaque a uns ou a outros e analisa-os de acordo com o grau de relevância e o significado que lhes atribui. Entre estes processos estão alguns que são referidos com muita frequência: (i) a procura de regularidades e de invariantes; (ii) a abstracção e a generalização; e (iii) a formulação de conjecturas e a sua demonstração ou refutação.

Assim, alguns autores enfatizam sobretudo a procura de regularidades e de invariantes. Por exemplo, Frobisher (1994) discute o significado do termo processos no que respeita a investigações e problemas. Segundo o autor, os processos “são os meios através dos quais os alunos põem a funcionar conceitos, conhecimentos e capacidades” (p. 161). Referencia ainda quais os processos que na sua opinião poderem estar presentes quando se investiga ou explora problemas matemáticos e estabelece ligações entre eles da seguinte forma (p. 163):



De acordo com esquema apresentado, há, num primeiro momento, uma interrogação a uma determinada situação e é formulada uma questão sobre a qual se vai trabalhar. Nesta fase, a procura de padrões e regularidades é um processo que assume particular relevo na formulação de uma ou mais coniecturas que serão sujeitas a teste ou verificação. Depois de uma coniectura ter passando no teste, é necessário verificar a sua generalização e demonstrar a sua veracidade para deixar de ser coniectura e tornar-se uma propriedade reconhecida. A sequência descrita pode ser interrompida em qualquer momento para, se necessário, rever o percurso realizado e modificar os primeiros pensamentos. A mesma situação pode também dar origem a muitas propriedades, fazendo percorrer a sequência várias vezes.

Para Goldenberg (1998), o processo de criação matemática envolve um percurso de tentativa-erro, de formulação e teste de coniecturas, de análise de analogias, de reflexão e de crítica. O início de uma tarefa é considerado por muitos a fase mais difícil pois é necessário seleccionar uma estratégia de partida para a investigação. A primeira fase é a mais informal e inicia-se muitas vezes com a experimentação de várias estratégias, recolha de dados e geração de alguns exemplos. Segundo o autor, na medida em que a Matemática é a ciência dos padrões, ela trata da procura da estrutura subjacente a coisas que em tudo o resto parecem completamente diferentes: invariantes,

ou seja, coisas absolutas ou relativas que permanecem fixas enquanto que partes delas variam.

Outros autores destacam o processo de especialização. É o caso de Mason, Burton e Stacey (1982/88) para quem a especialização consiste em considerar exemplos particulares, com o objectivo de compreender a questão e clarificar ideias. Na sua perspectiva, este processo deve ser conduzido de forma sistemática para que possa surgir alguma desconfiança que permita a detecção de alguma regularidade e que potencie o processo de generalização. Consideram-no por isso fundamental para que os alunos iniciem e se envolvam numa actividade.

Embora os resultados de exemplos específicos possam ser úteis, grande parte do pensamento matemático é criado a partir da reciprocidade constante entre a especialização e a generalização. Esta reciprocidade pode ser traduzida do seguinte modo: a especialização é usada para obter a evidência com base na qual será feita uma generalização; a generalização começa quando nos apercebemos da existência de uma regularidade, isto é, quando observamos certas características comuns a muitos exemplos particulares e ignoramos outras (Mason, Burton & Stacey, 1982).

Para Mason (1996), os processos matemáticos de especialização e generalização, situam-se verdadeiramente no coração da Matemática e do raciocínio matemático. Dito de uma forma simples, generalizar corresponde a atribuir a um conjunto alargado de objectos, as propriedades de um dado objecto, enquanto particularizar corresponde a considerar casos particulares. O processo de formulação de conjecturas é o processo que gira em torno do ser capaz de reconhecer uma regularidade ou uma analogia, ou seja, de ser capaz de fazer uma generalização. A regularidade descoberta que leva à formulação de uma conjectura (processo de perceber ou de supor que alguma coisa deve ser verdade) implica uma investigação sobre a sua veracidade.

Outros autores, ainda, dão especial relevo a este processo de formulação de conjecturas. Estas, depois de formuladas com base em evidência mais ou menos sólida, devem ser verificadas e justificadas ou refutadas. Os processos de justificação e prova de conjecturas são frequentemente esquecidos pelos alunos pois, de uma maneira geral, eles não sentem a sua necessidade. Contudo, o processo de justificar, procurando convencer os outros de que algo é verdade, é mais usado pelos matemáticos do que o processo de provar.

Para Carpenter, Frank e Levi (2003), o objectivo de desafiar os alunos a fazer conjecturas não é apenas levá-los a falar sobre Matemática e tornar explícitas as ideias

matemáticas. Os alunos devem fazer conjecturas porque são essas ideias que lhes permitem aprender Matemática nova e compreender a Matemática que já aprenderam e usaram. Os autores referem ainda que as tentativas dos alunos para justificar que uma afirmação é verdadeira podem ser classificadas em três níveis: apelo à autoridade, justificação por exemplo e argumentos generalizáveis. No primeiro caso, os alunos evitam a justificação matemática. É necessário ajudá-los a perceberem que precisam de pôr em causa as suas ideias e usar argumentos matemáticos para as justificar. Os alunos precisam de decidir por eles quando é que uma coisa faz sentido e não aceitar algo como verdadeiro só porque alguém o disse. A forma de justificação mais comum dos alunos é a justificação por exemplo. Alguns dos que usam exemplos para justificar uma conjectura não estão convictos de mostrar assim a veracidade da conjectura. Em muitos casos, apenas não conseguem ir além disso. Começam, no entanto, a perceber a necessidade de formas mais gerais de argumentação e por isso o professor deve incitá-los a buscar outras formas de justificação. Finalmente, a maior parte dos alunos não usa argumentos generalizáveis. No entanto, à medida que vão evoluindo, começam a ver os limites de argumentar através de exemplos. Podem ser então encorajados a empregar formas mais gerais de argumentação. Estes autores pensam que mesmo que o facto dos alunos não serem capazes de provar as conjecturas permite-lhes serem mais produtivos a gerar conjecturas. No seu entender, os alunos tendem a ser capazes de gerar conjecturas e usá-las de modo significativo antes de serem capazes de compreender o que constitui uma justificação apropriada.

A questão da demonstração é discutida em profundidade por Davis e Hersh (1985). Para estes autores, a demonstração é mais do que um simples pedantismo, já que “aumenta o entendimento, mostrando o que é essencial no assunto. As demonstrações sugerem Matemática nova. O principiante que estuda demonstrações se aproxima mais da criação de Matemática nova” (p. 182). Quando o problema é demasiado difícil para os alunos justificarem os seus resultados precisamos de lhes tornar claro que estes resultados apenas têm a força de hipóteses. Também nos casos em que as afirmações são tão simples que parecem evidentes por si próprias é importante perceberem que uma demonstração é possível e necessária. Os autores notam ainda que, embora as demonstrações contenham elementos formais, como símbolos, regras de inferência e sintaxe, também contêm elementos informais, como por exemplo a linguagem natural.

Davis e Hersh (1985) consideram os processos apresentados anteriormente se podem encontrar em Matemática, muito particularmente, quando se realizam

investigações matemáticas. No entanto, na sua perspectiva, nem todos os processos utilizados neste tipo de trabalho são exclusivos da Matemática, embora tenham um importante papel no estabelecimento de novas ideias e estruturas da mesma.

Também para Frobisher (1994), existe um grande número de processos que são independentes dos conteúdos matemáticos e que são úteis na resolução de problemas de outras disciplinas. Entre estes contam-se os processos de comunicação (como explicar, falar, concordar e questionar), processos de raciocínio (como recolher, clarificar, analisar e compreender) e processos operacionais (como recolher, classificar, ordenar e mudar). Na sua perspectiva, todos estes processos podem estar relacionados com processos específicos da Matemática e devem ser desenvolvidos combinando esforços das diferentes disciplinas.

Este autor destaca ainda um outro processo que considera estar na base da construção do edifício matemático – a simbolização. As linguagens formais foram introduzidas com o intuito de tornar as demonstrações matemáticas mais rigorosas, isto é, de aumentar a certeza da conclusão de um raciocínio matemático. Um texto formal é uma cadeia de símbolos que, quando manipulada por um matemático é transformada noutra cadeia de símbolos. Tal manipulação de símbolos pode ser objecto de um estudo matemático, sendo então chamada de “teoria da demonstração”.

O pensamento matemático constitui um processo eminentemente cognitivo. No entanto, os aspectos afectivos também têm merecido alguma atenção por parte de alguns autores (Poincaré, 1988; Hadamard, 1945; Burton, 1995; Braumann, 2002). Na verdade, o modelo da dinâmica do pensamento matemático descrito por Mason, Burton e Stacey (1982/88) realça a existência de uma importante ligação entre o cognitivo e o afectivo. A motivação dos alunos é necessária para despoletar o processo de pensamento matemático. O estímulo para iniciar esse processo pode advir de uma ideia, de uma observação ou de um qualquer acontecimento. A confiança é adquirida através da manipulação dos elementos e conduz à compreensão de algum padrão. A curiosidade e a tensão sustentam o processo até à construção de uma articulação. São ainda as incompreensões e os bloqueios que provocam oscilações dentro e entre as voltas.

Sendo a actividade matemática uma actividade humana, o lado lógico da Matemática coexiste com o seu lado extra-lógico. Por exemplo, Poincaré (1988) contesta que seja possível compreender o trabalho do matemático e os processos que ele utiliza exclusivamente em termos de lógica. Para este autor, a intuição que actua, em grande medida, de forma inconsciente, constitui uma componente fundamental do

espírito matemático e do processo de criação desta ciência. Também Hadamard (1945), ao analisar e discutir as relações entre o consciente e o inconsciente e entre o lógico e o fortuito, conclui que é incontestável o papel do trabalho inconsciente na invenção matemática, excluindo assim a possibilidade de imputar a descoberta ao acaso puro. As súbitas iluminações que podem ser chamadas de inspirações não podem ser produzidas somente por acaso, sendo necessário a intervenção de algum processo mental desconhecido para o inventor.

Davis e Hersh (1985) estabelecem igualmente uma distinção entre Matemática ‘inconsciente’ e Matemática ‘consciente’. Segundo estes autores, a intuição desempenha um papel fundamental no pensamento matemático e surge das representações mentais de objectos matemáticos adquiridos não através de memorização mecânica de definições e algoritmos, mas por experiências repetidas. Num estudo conduzido por Burton (1999), a maioria dos matemáticos considera igualmente que a intuição desempenha um papel fundamental na sua investigação, embora não sejam capazes de descrever em que consiste e como pode ser desenvolvida.

Associado a este papel do inconsciente e da intuição surge o elemento estético, já sublinhado por Poincaré (1988). Trata-se de uma perspectiva partilhada por muitos dos matemáticos entrevistados por Burton (1995), que afirmam “a importância de critérios estéticos aplica-se [...] aos julgamentos [...] que fazemos a toda a hora no trabalho matemático” (p. 284). Na verdade, o conhecimento matemático é usualmente alvo de apreciações de carácter estético. A beleza matemática está relacionada com a simplicidade das ideias e das demonstrações matemáticas, com a sua inter-relação e com as suas potencialidades de conexão com várias áreas da Matemática. Para Braumann (2002), são ainda os mecanismos intuitivos e razões estéticas que levam a pensar na veracidade de uma proposição. Para este autor, é a simbiose entre os processos cognitivos e afectivos que alimenta e motiva a Matemática.

Parece-me pois que o conjunto de processos matemáticos destacados pelos diferentes autores são complementares e realçam toda a riqueza que caracteriza a actividade investigativa. Prestar atenção aos processos de investigação e aos estados emocionais e psicológicos que os provocam é fundamental para conseguir um ponto de vista mais útil e criativo acerca do raciocínio matemático.

Pensamento matemático e ensino

Com o cada vez maior desenvolvimento científico e tecnológico, há tarefas com que nos deparamos frequentemente que requerem a utilização de ‘ferramentas’ matemáticas. Por isso, não basta conhecer procedimentos de cálculo e conteúdos matemáticos isolados, é necessário ter um conjunto de competências que promovam os modos de pensar e raciocinar em Matemática. Para Schoenfeld (1994) o facto de uma pessoa estar preparada para utilizar as ferramentas matemáticas não significa que seja capaz de pensar matematicamente. Na sua perspectiva, pensar matematicamente significa desenvolver um ponto de vista matemático (valorizando os processos de matematização e de abstracção e tendo preferência por aplicá-los), desenvolver competência com as ferramentas e usar essas ferramentas ao serviço da estrutura de compreensão. Trata-se de capacidades que, segundo diz, têm de ser aprendidas.

A Matemática escolar tende a focar-se e a dedicar muito tempo ao ensino dos resultados que a Matemática produziu, geralmente apreendidos como um conjunto de factos e técnicas, e a negligenciar os processos. Isto leva à reconhecida dificuldade demonstrada pelos alunos em pensar matematicamente. No entanto, para os estudantes, é tão necessário conhecer uma parte do corpo de resultados como saber como se pensa matematicamente, ou seja, conhecer os modos de pensar que Goldenberg (1998) designa por “hábitos de pensamento” (p. 33).

Segundo Mason, Burton e Stacey (1982), para que o pensamento matemático se desenvolva é necessário estar-se ciente dos seus processos. Consideram, no entanto, que é difícil aprender a utilizar esses processos ao mesmo tempo que se aprende conteúdos. Só depois de conhecidos tanto os processos como os conteúdos, numa primeira fase isoladamente, é que o conhecimento passa para outro nível e se começa a ter consciência da sua constante interacção.

Nos últimos anos tem sido muito discutida a ideia de que, na educação matemática, a preocupação deve ser focada em que os alunos adquiram as destrezas e técnicas que se identificam com o fazer Matemática ou pensar matematicamente (APM, 1988; NCTM, 1989/91). As recomendações das *Normas* do NCTM (1989/91) são consistentes com as características da cultura matemática na medida em que ao desenvolver nos alunos a capacidade para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, para resolver problemas não rotineiros e para comunicar sobre a

Matemática e através dela, está-se a dar mais ênfase ao raciocínio do que à mecanização.

Também Carpenter, Frank e Levi (2003) partilham uma perspectiva alargada da Matemática que envolve formas de pensamento, incluindo modos de gerar ideias, expressá-las, representá-las e justificar que são verdadeiras. Uma vez que aprender Matemática envolve aprender formas de pensamento, é fundamental conhecer os caminhos matemáticos de pensamento que levam à geração dessas ideias e o seu uso para justificar os procedimentos matemáticos que estão a aprender, em vez de uma colecção de procedimentos desconectados para desenvolver cálculos. Outros autores, como Pirie (1987) e Tanner e Jones (1997) defendem ainda que as capacidades de pensamento matemático se aprendem sobretudo em contextos de problemas abertos pelo que consideram que uma boa investigação faculta a exploração e a exposição do pensamento matemático.

Actividades de investigação

Conceito de investigação matemática

Na literatura, existe uma grande diversidade de formulações sobre o conceito de ‘actividades de investigação matemática’ ou ‘investigações matemáticas’. O conceito de investigação matemática é naturalmente associado à actividade que os matemáticos profissionais desenvolvem na produção de conhecimento e que consiste em descobrir relações entre objectos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, formular conjecturas sobre as respectivas propriedades, procurar argumentos que demonstrem essas conjecturas e levantar novas questões para futura investigação. Neste sentido, investigações matemáticas descrevem um tipo de actividade a que se associam algumas características inerentes ao processo de criação matemática, tais como: descoberta, exploração, pesquisa, autonomia, tomada de decisões e espírito crítico.

Para Poincaré (1908/1996), fazer Matemática é, essencialmente, investigar. Este autor apresenta uma descrição do processo de criação matemática por si empreendido que difere da visão que usualmente os alunos têm desta ciência enquanto corpo fixo de conhecimentos. A referência à Matemática, encarada como uma forma de gerar conhecimento e não como um corpo de conhecimentos surge também em outros autores como Pólya (1945) e, mais recentemente, Braumann (2002).

Em contextos de ensino e aprendizagem, o conceito de investigação matemática traduz uma actividade em que o aluno é chamado a experimentar, de acordo com o grau de ensino em que se encontra, um trabalho com características semelhantes ao realizado pelos matemáticos profissionais. Note-se, porém, que a finalidade com que os alunos realizam tarefas de investigação é diferente da dos profissionais:

Entre o trabalho do aluno que tenta resolver um problema em geometria ou álgebra e o trabalho de invenção [dos matemáticos] podemos dizer que existe apenas uma diferença de grau, uma diferença de nível, tendo ambos os trabalhos uma natureza semelhante. (Hadamard, 1945, p. 104).

As actividades de investigação, para os alunos, constituem um modo de contactar de perto com a Matemática enquanto actividade e os processos de desenvolvimento desta ciência. Dada a posição central que a investigação ocupa na actividade dos matemáticos, esses processos característicos foram historicamente criados no decorrer de investigações e podem estar presentes mesmo em investigações elementares:

Entendemos que a maior parte dos tipos de investigação desenvolvidos pelos matemáticos têm equivalentes elementares que podem e devem ser propostos como tarefas aos alunos, de modo que eles experimentem um leque alargado de ideias e processos matemáticos. (Silva, Veloso, Porfírio & Abrantes, 1999, p. 83).

A actividade matemática dos alunos pode consistir essencialmente em procurar regularidades, formular questões para as quais não têm resposta pronta, testar as primeiras conjecturas, estabelecer argumentos plausíveis e provas formais para validar (ou não) essas conjecturas e generalizá-las, se for caso disso, ou voltar a formular novas questões. A actividade investigativa, entendida desta forma, proporciona aos alunos um contacto com uma parte essencial da Matemática, fundamental para aproximar o 'aprender Matemática' do 'fazer Matemática'.

O conceito de investigação matemática, como actividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da actividade matemática genuína [...]. O aluno é chamado a agir como um matemático [...]. (Ponte, Brocado & Oliveira, 2003, p. 23)

Esta ideia de que aprender Matemática é fazer Matemática, defendida nos últimos anos em diversos documentos programáticos (NCTM, 1989/91, por exemplo), é uma perspectiva que encontra eco em muitos autores (Hadamard, 1945; Oliveira, Segurado & Ponte, 1998; Porfírio & Oliveira, 1999; Silva *et al.*, 1999). Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas (1998) argumentam que as investigações matemáticas, sendo uma parte essencial da actividade do investigador matemático, proporcionam ao aluno uma visão mais completa da Matemática. Assumindo uma perspectiva idêntica, Braumann (2002) refere que

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática [...]. Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática [...]. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. (p. 5).

Também Hatch (1995) defende que a realização de actividades de investigação gera uma interacção entre o aluno e a Matemática a ser aprendida, permitindo desta forma que os alunos criem a sua própria Matemática.

Dos problemas às investigações matemáticas

Entre as diversas actividades que o aluno pode realizar na sala de aula, a formulação e resolução de problemas é a que se relaciona mais de perto com as actividades investigativas. A má definição destes dois conceitos, as diversas interpretações que vários autores têm dos mesmos e o seu uso indistinto, traz algumas dificuldades à demarcação entre as duas actividades. No entanto, a maior parte dos autores clarificam estes conceitos através da descrição das diferenças e semelhanças entre ambas.

A importância da formulação e resolução de problemas no ensino da Matemática foi sublinhada por Pólya (1945). Na sua perspectiva, o aluno aprende Matemática se for desafiado com problemas interessantes, de modo a ter uma experiência matemática autêntica. No início da década de 80, a resolução de problemas tornou-se uma linha fundamental no ensino da Matemática, como mostram alguns documentos curriculares como APM (1988) e NCTM (1989/91). Abrantes (1988) defende, no entanto, que o interesse educacional destas tarefas varia dependendo do tipo de problema que se propõe ao aluno. No mesmo sentido se pronuncia a APM (1996): "Para que um

problema tenha valor educativo, é importante que a actividade do aluno se não reduza a encontrar a sua solução” (p. 56).

Os problemas com questões mais abertas, designados por ‘problemas abertos’, revelaram ter maior potencialidade ao nível ensino-aprendizagem desplotando assim o interesse que actualmente se confere às investigações. Note-se, contudo, que Pólya (1962/81) também defendia que o professor deveria proporcionar aos alunos, na sala de aula, um trabalho criativo, de investigação, através de problemas apropriados que designou por ‘problemas de investigação’. Segundo o autor, estes problemas eram caracterizados por: (i) o aluno poder formular, ou participar na formulação do problema, (ii) terem um bom *background* e sugerirem outros problemas desafiantes e (iii) colocarem a observação, conjecturas, argumentos indutivos, em suma, o ‘raciocínio plausível’ num papel proeminente.

Abrantes (1994) defende que tanto a resolução de problemas como as investigações apelam à imaginação e à criatividade, requerendo capacidades que se situam muito para além do cálculo e da memorização de definições e procedimentos. Estas capacidades, frequentemente designadas de ‘ordem superior’, surgem associadas à comunicação, ao espírito crítico, à modelação, à análise de dados, às demonstrações e a outros processos de natureza metacognitiva. A mesma ideia é também referida por Ponte e Matos (1996) quando afirmam que, à semelhança do que acontece com as actividades de resolução de problemas, as investigações matemáticas implicam processos complexos de pensamento e requerem o envolvimento e a criatividade dos alunos.

São muitos os autores que, reconhecendo aspectos comuns, destacam as investigações matemáticas da resolução de problemas em vários aspectos. Entre estes aspectos surgem os objectivos, o papel dos professores e dos alunos e os processos matemáticos que estão envolvidos em cada uma dessas actividades. Por exemplo, Ponte e Matos (1996) consideram que os problemas têm objectivos precisos e claros já formulados à partida enquanto que as investigações matemáticas tendem a partir de enunciados e objectivos pouco precisos e estruturados e por exigirem que sejam os próprios alunos a definir o objectivo, a conduzir experiências, e a formular e testar conjecturas.

Para Ernest (1991), embora os conceitos de problema e investigação estejam ambos relacionados com a inquirição, entendida como um processo ou atitude matemática de questionar, o processo investigativo tem um carácter mais divergente do

que, em geral, a resolução de problemas. Na sua perspectiva, as investigações matemáticas caracterizam-se, sobretudo, por serem abertas, permitindo que o aluno estabeleça o caminho a seguir e coloque as suas próprias questões e pelo estímulo que fornecem ao aluno no sentido de este justificar e provar as suas afirmações, e de explicitar matematicamente as suas argumentações perante os colegas e o professor. Numa investigação não se pretende que os alunos encontrem 'respostas certas' mas que formulem conjecturas e se convençam a si próprios e aos outros das suas descobertas (Pirie, 1987).

Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2003), as actividades de investigação e os problemas contrastam ainda pelos seus enunciados. Enquanto que num problema o enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido, a formulação de problemas, a colocação de questões e o estabelecimento de objectivos por parte dos alunos são os atributos essenciais das investigações.

Além disso, ao contrário da resolução de um problema, em que podem ser sugeridas e seguidas heurísticas, nas investigações é muito difícil apresentar um conjunto de estratégias a seguir pois as possibilidades são imensas (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998). O que torna uma actividade de investigação motivadora e desafiante para o aluno é o facto do processo de resolução e a solução ou soluções de uma questão não serem imediatamente acessíveis. Esta ideia é também defendida por Morgan (1997). Para esta autora, uma investigação é fazer 'verdadeira matemática' e não praticar ou reproduzir técnicas já estabelecidas, permitindo ao aluno um trabalho exploratório, aberto, criativo e independente.

Outro aspecto a destacar na distinção entre os problemas e as actividades de investigação matemática é o papel do professor. Pela sua natureza, a realização de actividades de investigação na sala de aula, é uma perspectiva curricular inovadora pelo que requer adaptações pedagógicas e impõe novas exigências e responsabilidades ao professor. O facto das actividades de investigação tenderem a ser abertas, requer que o professor tenha conhecimentos matemáticos sólidos para planear e desenvolver tarefas com situações possíveis de serem investigadas pelos alunos e capazes de proporcionar diferentes níveis de aprofundamento (Goldenberg, 1999). A construção destas tarefas é uma função complexa que envolve aspectos tão diversos como os conhecimentos, potencialidades e interesses dos alunos. O professor deverá também ter uma grande flexibilidade, tanto para recorrer a estratégias diversificadas de resolução das tarefas,

como para lidar com situações inesperadas que irão necessariamente surgir (Brunheira, 2000).

Um outro desafio colocado ao professor é a integração das tarefas de investigação no currículo de Matemática. A integração das investigações nas aulas é justificada, dependendo dos autores, pela natureza da Matemática, pela motivação criada nos alunos e por facilitar a aprendizagem. A valorização de um ou outro aspecto, pode dar lugar a diferentes abordagens curriculares e formas de trabalho na sala de aula.

A aula com investigações e os seus intervenientes

Dadas as características das actividades de investigação serem distintas das de outras actividades matemáticas realizadas na sala de aula, também a dinâmica de uma aula centrada em tarefas de investigação poderá ser diferente da encontrada nas aulas tradicionais.

Segundo Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), habitualmente, a realização de uma actividade de investigação compreende três fases distintas: (i) apresentação/introdução da tarefa, (ii) desenvolvimento da tarefa e (iii) discussão de resultados e reflexão final. A primeira fase, de apresentação da tarefa aos alunos, embora de curta duração para que os alunos não percam o interesse na tarefa e para que o tempo da aula possa ser bem aproveitado é fundamental para que todos os alunos entendam o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da actividade. A introdução da tarefa pelo professor pode ser feita só oralmente, apresentando a tarefa sem qualquer suporte escrito, através da distribuição aos alunos de um enunciado escrito sem qualquer discussão inicial ou acompanhar a distribuição do enunciado por uma apresentação oral ou uma leitura da tarefa em grande grupo que se destina a clarificar alguns aspectos da mesma. Este modo misto de apresentação da tarefa é especialmente relevante quando os alunos têm pouca ou nenhuma experiência com este tipo de actividade. É importante que os alunos entendam a natureza da tarefa proposta, bastante diferente das outras actividades mais usuais na sala de aula. O aluno não está perante uma questão bem definida a que tem de dar uma resposta mas tem, ele próprio de formular as suas questões com base na situação que lhe é apresentada (Ponte, Brocado & Oliveira, 2003). Nesta introdução o professor deve ter o cuidado de não explicitar demasiado o que os alunos 'devem fazer' de forma a não condicionar a exploração nem o estabelecimento

das conjecturas destes. É necessário que o aluno entenda o que se pretende mas a interpretação da tarefa depende essencialmente dele.

Ainda de acordo com Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), na fase seguinte, a aula é centrada na actividade dos alunos enquanto realizam a tarefa. Dado que se pretende desenvolver nos alunos uma atitude investigativa, as intervenções do professor e as interacções entre aluno-aluno assumem extrema importância. Durante a actividade investigativa dos alunos, o professor deve estar sempre atento ao desenvolvimento do trabalho de cada aluno ou grupo de alunos e para a possibilidade de dar uma sugestão, fazer uma observação ou colocar uma questão como resposta às dificuldades e solicitações dos alunos. O professor poderá colocar algumas questões que os ajudem a pensar, ou dar pistas acerca de estratégias a usar, mas evitar dar opiniões muito concretas.

Quando os alunos estão pouco ou nada familiarizados com as investigações, é importante que o professor dê algumas pistas de exploração e que lhes peça algumas sugestões. Este facto não coloca em risco o desenvolvimento da autonomia dos alunos no que diz respeito ao estabelecimento das suas próprias conjecturas se a tarefa for suficientemente rica e contribui para que o trabalho progrida posteriormente mais depressa. O professor deve responder às questões colocadas pelos alunos com outras questões, de modo a que as sugestões dadas sejam mais provocativas do que prescritivas (Pirie, 1987).

Uma vez que se pretende, com as tarefas de investigação, que os alunos utilizem alguns dos processos que caracterizam a actividade investigativa em Matemática (exploração, formulação de questões e conjecturas, teste e justificação das mesmas), o professor deve encorajar a interacção entre os alunos (estimulando a partilha de ideias, o confronto de opiniões e consequente argumentação), incentivar a recolha e registo de dados e desafiar os alunos a formular e justificar conjecturas, a reflectir sobre elas e a aprofundá-las. Só desta forma é possível criar um ambiente de aprendizagem agradável e envolvente necessário para que os alunos ganhem segurança nas suas ideias matemáticas, desenvolvam o raciocínio, criatividade e poder de argumentação, levando-os a aceitar de forma positiva uma aula com investigações. É também nesta fase que o professor deve estar atento ao trabalho desenvolvido por cada aluno ou grupo de alunos de forma a reunir informações sobre o progresso da investigação para poder adoptar uma estratégia de interacção com os alunos que considere adequada à fase seguinte, a da discussão.

Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), referem também que a fase de discussão de resultados e reflexão final é fundamental numa aula de investigação pois sem ela grande parte do valor da investigação perder-se-á. É nesta fase que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado, partilhando conhecimentos e pondo em confronto as estratégias, as hipóteses e as justificações que os diferentes alunos ou grupo de alunos construíram. Esta situação favorece o desenvolvimento de processo de reflexão consciente, por parte do aluno, sobre o trabalho desenvolvido, permitindo ainda que os processos de resolução sejam valorizados em relação aos produtos (Brocardo, 2001). O professor deve desempenhar o papel moderador, procurar trazer à atenção da turma os aspectos mais significativos do trabalho realizado e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente. Para a organização desta fase o professor deverá conhecer bem os trabalhos dos alunos para valorizar tanto os mais interessantes como os mais modestos. Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes (1999), sublinham a importância do aluno reflectir sobre o trabalho realizado:

Nos alunos, as actividades de investigação são um veículo para um conhecimento da natureza da matemática e dos seus principais processos de desenvolvimento. [...] Por isso é essencial que os alunos reflectam sobre as investigações que fazem, com a finalidade de tomar consciência dos processos que seguiram. (p. 82).

Além do poder de argumentação, é também nesta fase que os alunos têm possibilidade de desenvolver a capacidade de comunicar matematicamente. Este objectivo das investigações matemáticas pode ser desenvolvido, simultaneamente, através dos registos escritos que se pedem aos alunos no decorrer destas actividades e que constitui um desafio adicional para os alunos que não estão habituados. Neste caso, como sugerem Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) e Pirie (1987), pode ser vantajoso fornecer um conjunto de indicações precisas sobre a estrutura do relatório.

Estes registos feitos pelos alunos durante a investigação, devem ser incentivados desde o início até se tornarem uma rotina. Para o professor, a escrita dos resultados obtidos pelos alunos durante a realização das actividades de investigação tem a dupla função de permitir o planeamento de aulas futuras e aceder posteriormente ao trabalho dos alunos de forma a analisar o seu desempenho. Se o professor fizer uso destes registos como instrumentos avaliativos, é importante elucidar os alunos sobre quais são os aspectos que vão ser considerados nessa avaliação.

Pedagogia no ensino superior

Novos desafios para o ensino superior

Perante os desafios de uma sociedade exigente, competitiva e em constante mudança torna-se premente repensar a instituição e a docência universitárias. A este nível de ensino aponta-se hoje a tarefa de formar homens e mulheres competentes, criativos, flexíveis e dinâmicos, que busquem constante aprendizagem e que sejam capazes de lidar com situações novas. A escola em geral, e a universidade em particular, parece não estar a conseguir cumprir bem o seu papel, a avaliar pelas inúmeras dificuldades vividas quer pelos alunos, quer pelos seus docentes. A notória inadaptação do ensino superior às solicitações sociais e o insucesso dos estudantes universitários vêm sendo discutidos e tornaram imperioso redefinir as finalidades deste tipo de ensino em função da época em que vivemos e das mudanças que a caracterizam.

As funções tradicionais do ensino superior são fomentar e alargar os conhecimentos pela investigação e transmiti-los pelo ensino (Bireaud, 1995). Em virtude do lugar proeminente reservado à investigação, o ensino organiza-se em torno das disciplinas, cujos conteúdos são enunciados no modelo pedagógico tradicional. Os planos de estudo são desenhados tendo em atenção os requisitos do rigor científico, mas frequentemente são pensados independentemente de quem aprende e do que, como e onde aprendeu antes. Nas aulas, orientadas para os conteúdos, os conceitos abstractos são muitas vezes apresentados e só mais tarde, ilustrados com exemplos ideais que podem estar muito afastados da experiência pessoal dos alunos ou dos seus interesses. Segundo Dorier, Robert, Robinet e Rogalski (1994), as dificuldades encontradas pelos estudantes devem-se, sobretudo, ao facto destes apenas terem acesso a uma fase final do processo: a definição do conceito e o seu uso sistemático na resolução de problemas. O ensino tradicional, centrado no professor, parte da concepção de que conhecer é acumular e armazenar informações e recorre a uma estratégia de comunicação prioritariamente orientada no sentido do docente para o estudante.

O alargamento das funções do ensino superior e as alterações do seu público e estruturas fizeram surgir alguns problemas a que é necessário dar resposta. Entre estes contam-se, por exemplo, os problemas relacionados com a taxa de insucesso escolar ou a preparação para o exercício de uma profissão. Entendendo a universidade como um

serviço de educação que se efectiva pela docência e investigação, as suas actuais funções podem ser sintetizadas, nas seguintes:

Criação, desenvolvimento, transmissão e crítica da ciência, da técnica e da cultura; preparação para o exercício de actividades profissionais que exijam a aplicação de conhecimentos e métodos científicos; apoio científico e técnico ao desenvolvimento cultural, social e económico das sociedades. (Pimenta, Anastasiou & Cavallet, 2003, p. 359).

Estas novas atribuições exigem uma acção docente diferenciada da tradicionalmente praticada.

Estabelecer novas finalidades, traçar novos objectivos e procurar melhores condições para o processo educativo, são temas que suscitam uma reflexão pedagógica:

À pedagogia interessa sobretudo o processo de ensinar/aprender na sua generalidade, repondo-o no seu contexto institucional e social: as condições e as situações de aprendizagem, as mediações, os processos, as relações entre os actores... tais são os objectivos do seu estudo. (Bireaud, 1995, p. 63).

A pedagogia no ensino superior tem de servir para potenciar e aprofundar a capacidade da instituição, para problematizar e satisfazer as solicitações que interna e externamente se lhe colocam. Tal pedagogia assume uma enorme importância e, como tal, não pode ser ignorada.

A reflexão pedagógica no ensino superior

A pedagogia universitária não constitui um tema de investigação muito procurado. A reflexão pedagógica sistematizada é associada desde as suas raízes à educação da criança. Ao ser associada ao trabalho educativo com alunos mais jovens tende a ser subalternizada, e portanto, raramente é aceite pelos docentes do ensino superior. Estes tendem a considerar que o seu prestígio lhes advém do seu estatuto científico, do qual decorre naturalmente a sua competência pedagógica (Lamas & Cardeano, 2003). Apesar disso, a literatura tem evidenciado que um certo número de docentes do ensino superior, preocupados não só com o insucesso escolar e o abandono de estudos mas também em dar uma formação que faculte uma inserção profissional, concedem lugar à pedagogia ou à didáctica nas suas preocupações metodológicas e vêm

modificando o seu comportamento. Lamas e Cardeano (2003) defendem, por outro lado, que há uma “pedagogia espontânea” no ensino superior, construída ao longo dos tempos, ou não fosse uma aula magistral uma técnica pedagógica.

No entanto, o aperfeiçoamento da docência universitária exige uma integração de saberes complementares. Já não é suficiente o domínio de uma área científica do conhecimento, o professor deve desenvolver também um saber pedagógico. A introdução de uma mudança nas práticas pedagógicas implica uma autoformação que, quase sempre envereda pela via da investigação. Cabe aos professores uma reflexão mais aprofundada sobre a metodologia de ensino que adoptam e as estratégias de aprendizagem matemática que possibilitam aos alunos. Para Wink (1999) a reflexão sobre a prática é um bom ponto de partida para iniciar um desenvolvimento de métodos de ensino universitário que tenham em vista o próprio aluno. É necessário facultar ao professor do ensino superior formas de apoio no uso de modelos alternativos ao de explicar/praticar, com ênfase nos modelos que envolvam a construção de conhecimento por parte dos alunos. Segundo o mesmo autor, o professor universitário poderá melhorar a sua prática lectiva se se consciencializar que o ensino não é uma apresentação de conteúdos mas a criação de experiências de aprendizagem eficazes, baseadas no resultado da investigação sobre como o aluno aprende e na reflexão sobre os resultados do seu ensino na aprendizagem dos seus alunos.

Os trabalhos de carácter mais marcadamente pedagógico têm incidido nos problemas decorrentes do ensino desta ou daquela disciplina, principalmente no campo das ciências exactas onde a já referida preocupação com o insucesso escolar se manifesta de forma mais visível. São disso exemplo os trabalhos realizados por Dorier, Robert, Robinet e Rogalski (1994) e Spierpinska, Trgalová, Hillel e Dreyfus (1999) sobre o ensino da Álgebra Linear e os estudos realizados por Frota (2001), Barbosa (2004), Araújo (2004) e Mello e Santos (2002) na área do Cálculo Diferencial e Integral. Confirma-se assim que os docentes do ensino superior praticam muitas vezes pedagogia sem o saberem e começam a aparecer novas práticas pedagógicas, ainda que difusas e pontuais. No entanto, persiste a questão de saber se essas práticas estão organizadas de tal maneira que se possa falar do aparecimento de novos modelos pedagógicos. Para se poder falar de modelo pedagógico, é preciso que as práticas se organizem de forma coerente e constituam um conjunto de estratégias articuladas logicamente umas nas outras, de forma a atingirem o objectivo pretendido: “Há necessidade de construir uma autêntica pedagogia do ensino superior que recorra à

investigação educacional e ao respeito pela complexidade dos fenómenos educativos” (Lamas & Cardeano, 2003, p. 385). Desta forma, e como afirma Bireaud (1995), talvez não seja ainda possível falar de pedagogia no ensino superior mas certamente se poderá falar de reflexão pedagógica no ensino superior.

A caminho de novas práticas pedagógicas

Ao longo dos anos, tem-se realizado uma pesquisa permanente, através do uso de metodologias variadas e adoptando enfoques distintos, cujo objectivo é entender os processos de como se dá o conhecimento e a aprendizagem. As crenças que os professores têm sobre o que é conhecimento, de que modo é aprendido e quais são as melhores formas de ajudar os alunos a aprender Matemática têm sido os alicerces nos quais são baseadas as práticas de ensino e o modo de conceber a tarefa de ensinar (Schoenfeld, 1992).

A revolução no estudo do pensamento que ocorreu nas últimas décadas teve importantes repercussões na educação, nomeadamente no desenho do currículo e na organização das actividades de aprendizagem. Segundo Ahern-Rindell (1999) o ensino sofre actualmente uma metamorfose que tem como objectivo, por um lado, levar os professores universitários a abandonar o seu papel de oradores e emissores verbais do conhecimento, passando a ser facilitadores e construtores da aprendizagem e, por outro, levar os estudantes a deixar de ser meros observadores passivos transformando-os em participantes activos no processo de aprender. A ênfase tem de se deslocar da memorização de detalhes factuais para a compreensão de ideias e princípios, a aplicação destes na forma de resolução de situações problema, e a construção de novo conhecimento como resultado da consciencialização, por parte do aluno, da sua responsabilidade no processo de ensino-aprendizagem.

Na área da Matemática, novas perspectivas têm surgido na busca de uma educação mais significativa e formadora. Alguns estudos, além de realçarem a importância da ciência para a prática, ajudam a perceber o que poderão ser ambientes de aprendizagem significativos e qual a relevância da introdução de modos diferenciados de aprender esta disciplina.

Conboy, Fonseca e Gama (2002) fazem referência a alguns estudos, em Portugal e no estrangeiro, que abordam modelos de ensino alternativos ao tradicional explicar/praticar no ensino superior, com ênfase em modelos que envolvem a

construção de conhecimento por parte do aluno. Entre as estratégias mais comuns, os autores focam sobretudo a aprendizagem cooperativa e a resolução de situações-problema. Nos estudos apresentados foram obtidos resultados positivos em termos de aproveitamento, participação, interação, aprofundamento do conhecimento de conteúdos científicos e consequentemente menor insucesso em respostas solicitadas aos alunos. Estes, de uma forma geral, revelaram gostar mais dos novos métodos de ensino com o desenvolvimento de competências na resolução de problemas e aplicação dos conteúdos a situações do quotidiano.

Em diversos países os docentes de cursos superiores que têm disciplinas de Matemática nos seus currículos, têm tomado consciência das dificuldades envolvidas no processo de ensino-aprendizagem nesta área e procuram soluções para amenizar os problemas. Têm por isso investido na criação de novas estratégias e ambientes de aprendizagem que têm resultado em vários estudos e pesquisas. A partir de considerações sobre a docência universitária no Brasil, Cury (2004), apresenta um conjunto de experiências que têm sido implementadas em algumas instituições de ensino superior relacionadas com o ensino de disciplinas de Matemática. Destes trabalhos destaco os de Barbosa (2004) e de Araújo (2004), que baseiam a discussão do papel da modelagem matemática no ensino do Cálculo Diferencial e Integral através de experiências onde essa estratégia de ensino foi privilegiada. A modelação, como estratégia de ensino-aprendizagem no ensino superior, usualmente associada à noção de trabalho de projecto ou a ferramentas computacionais, é também analisada por outros autores, como por exemplo, Tavares (1998), Carreira (1992) e Mello e Santos (2002).

A perspectiva de incluir nos processos educativos tarefas de cariz investigativo não é pacífico nem constitui novidade actual. Por exemplo, Malonek, Carvalho e Silva e Costa (2002) referem, relativamente aos estatutos da Universidade de Coimbra de 1772:

Nota-se aqui um afastamento do ensino tradicional em que os alunos se limitavam a repetir o que o mestre afirmava. Além da memorização das “verdades Elementares das Lições” era também necessário compreender a Matemática ao ponto de os alunos “indagarem outras verdades desconhecidas”. (p. 170).

Também em Silva *et al.* (1999), as actividades investigativas são referidas como usuais nas aulas de alguns professores de Matemática da universidade:

Alguns professores universitários, eles próprios investigadores matemáticos, transformavam as suas aulas de cariz tradicional e 'inteiramente expositivas' em verdadeiros *shows* de investigação, mostrando de forma viva como é usada a intuição para explorar situações e tentar resolver problemas, e como são avançadas conjecturas e depois refutadas ou provadas. Isto era por exemplo a prática corrente de Sebastião e Silva, que levava este estilo pedagógico até ao ponto de propor aos seus alunos nas aulas práticas, e mesmo nos exames (que por vezes duravam dias inteiros...), verdadeiras tarefas de investigação. (p.77).

No entanto, a introdução de tarefas investigativas na aprendizagem da Matemática no ensino superior como metodologia generalizada de ensino-aprendizagem constitui algo novo e coloca desafios às crenças estabelecidas relativamente ao modo de entender o ensino da Matemática e o processo de evolução dos alunos na aprendizagem. Mesmo considerando que a pedagogia de inquirição é a mais adequada, Ernest (1996) distingue várias formas de abordar a sua integração na prática curricular. Uma das vertentes integra as investigações como um tema adicional, mas em que os conteúdos são preponderantes. Outra das vertentes referidas é a adopção das investigações como abordagem pedagógica de todo o currículo e não como algo adicional. Nesta perspectiva, as investigações são entendidas em termos de processos dos alunos, os ambientes de aprendizagem cuidadosamente estruturados e os professores entendidos como gestores e facilitadores da aprendizagem. Os temas abordados podem ainda ser de Matemática pura ou incluir o trabalho de grupo e a discussão, sendo incentivada a autonomia e a possibilidade dos alunos seguirem os seus caminhos na formulação de metas a atingir.

Parece, portanto, ser consensual, que estamos à procura de um novo paradigma de educação e de novos métodos para o ensino da Matemática. As novas perspectivas incentivam a investigação, a problematização, a contextualização, a exploração, a argumentação, a reflexão crítica e a aprendizagem. Provavelmente, o método expositivo terá sempre um papel importante a desempenhar no ensino superior, quer pela natureza e experiência dos docentes, quer por razões de economia e de relação custo/benefício (Conboy, Fonseca & Gama, 2002). No entanto, se o que se pretende é promover o desenvolvimento da compreensão de novos conceitos numa forma significativa, a verdadeira apropriação de saber e o desenvolvimento de pensamento crítico, então torna-se necessário o uso de actividades mais variadas, que induzam o estudante à busca de novas relações matemáticas e à construção de novas generalizações ou abstrações.

Serão novos caminhos que levarão a uma educação com significado e de maior qualidade.

CAPÍTULO 3

Proposta Pedagógica

O projecto de intervenção pedagógica

A minha experiência como docente tem-me levado a constatar que apesar dos esforços dos professores, um número significativo de alunos limita-se a memorizar a informação que lhes é transmitida de forma a poderem debitá-la nos momentos de avaliação. Esses alunos encaram a Matemática como um corpo fixo de conhecimentos descontextualizados e procuram 'receitas' que permitam responder às questões que lhes são colocadas em vez de aprenderem a pensar por eles mesmos de forma a compreender o significado das respostas por eles dadas.

O trabalho que me proponho realizar corresponde a pôr em prática uma proposta pedagógica capaz de desenvolver a compreensão matemática nos alunos através da introdução de actividades de exploração/investigação na sala de aula. Esta proposta pedagógica vai ser concretizada nas duas turmas (num total de 50 alunos) do 2.º ano dos cursos de licenciatura da Escola Naval, às quais lecciono a disciplina de Análise Numérica.

Nesta disciplina há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e/ou investigativa que podem ser desenvolvidas na sala de aula. Utilizando os conhecimentos prévios de Matemática, adquiridos pelos alunos ao longo do seu percurso escolar, a Análise Numérica é um domínio da Matemática especialmente propício a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas, evitando assim, uma visão desta ciência centrada na execução de procedimentos e algoritmos. Trata-se de uma disciplina semestral, correspondendo a 14 semanas, com uma carga horária de 4 horas semanais divididas em 2 blocos de 2 horas cada. Pretendo utilizar uma parte significativa dos tempos de aulas na realização de actividades de exploração/investigação. As restantes aulas deverão contemplar exposições teóricas dos conteúdos programáticos e oportunidades para a resolução de problemas de aplicação directa ou de exercícios práticos. A distribuição dos tempos de trabalho por estas três

vertentes e o seu encadeamento apresenta-se no planeamento das aulas, proposto por mim e que se encontra no anexo 1.

Antes do início da experiência pedagógica, considero de grande importância consciencializar os alunos acerca dos objectivos, procedimentos e conteúdos formativos inerentes a esse processo. Como estamos perante uma forma diferente de aprender, é da maior importância que os alunos partam para esta experiência pedagógica com plena consciência do processo em que vão estar envolvidos potenciando, deste modo, a tranquilidade de todo o percurso formativo. Assim, tenciono sensibilizar os alunos para a responsabilidade que têm neste processo, para as eventuais dificuldades que podem surgir e para os aspectos potencialmente positivos, nomeadamente, as capacidades a desenvolver.

Nas aulas, onde se vai centrar a investigação, vou propor tarefas diversificadas e motivadoras, de carácter aberto, relacionadas com questões críticas do mundo real. Os alunos serão confrontados com problemas para os quais não têm teoria nem modelo para fazerem um tratamento completo, pelo que são desafiados a desenvolver e defender as suas próprias estratégias. Consequentemente, várias soluções são aceitáveis sob o ponto de vista do conjunto de conhecimentos disponíveis ao aluno naquele momento. O objectivo destas tarefas é envolver os alunos no desenvolvimento de formas de matematização relacionadas com opções ligadas ao tratamento dos tópicos de Análise Numérica previstos no programa da disciplina.

Os alunos vão ser incentivados a utilizar a máquina de calcular, como um precioso auxiliar de trabalho na realização das tarefas. Este apoio é fundamental, não só na visualização de informação disponibilizada na tarefa mas sobretudo, quando os cálculos se tornam repetitivos e fastidiosos, podendo levar à desmotivação ou o abandono da tarefa.

Como modo de organização do trabalho, vou solicitar aos alunos para se organizarem em grupos de três ou quatro. Além disso, procuro discutir a postura/atitude a ter no trabalho de grupo, nomeadamente nas aulas que envolverem a realização das tarefas e no trabalho realizado por eles em tempo extra-lectivo. Este modo de trabalho permite melhorar a confiança dos alunos no trabalho em Matemática e pretende ser um facilitador da comunicação entre os elementos do grupo, entre o grupo e a professora e até entre os grupos.

No decurso das aulas que envolverem a realização de tarefas, irei circular pela sala para observar o desenvolvimento e forma de trabalho dos diferentes grupos e

esclarecê-los sobre algumas dúvidas geradas pelas tarefas. No entanto, pretendo que a minha intervenção seja no sentido de incentivar as discussões com comentários que não indiciem uma conclusão ou um 'modo de fazer'.

No final de cada tarefa os grupos apresentarão a sua exploração e os seus resultados sob a forma de um relatório final escrito, realizado em grupo e em tempo extra-lectivo. A produção do relatório da tarefa de investigação tem como objectivo ajudar os alunos a enunciar as diferentes fases da investigação, as estratégias utilizadas, as conjecturas formuladas e a sua verificação, e a argumentar e comunicar por escrito as suas conclusões. Como forma de motivação e encorajamento, quando apropriado, utilizarei os relatórios para transmitir aos alunos palavras de incentivo e reacções positivas em relação ao trabalho que vão desenvolvendo. Estes relatórios constituem um elemento essencial para a avaliação do seu desempenho na disciplina. Deverão ser entregues após a realização da tarefa na aula e servirão, deste modo, como auxiliares da professora na gestão das discussões em grande grupo que se seguirão, dando-lhe conhecimento do grau de desenvolvimento do trabalho de cada grupo.

Terminada cada tarefa, os grupos vão ainda apresentar oralmente, na aula, o trabalho desenvolvido. A discussão inicia-se com a apresentação do trabalho do e pelo grupo que tiver tido um menor desenvolvimento na tarefa, solicitando-se em seguida aos outros grupos que vão acrescentando outras explorações e resultados por eles encontrados. Terminará quando mais nenhum grupo tiver algo a acrescentar. Cada elemento do grupo deve ser capaz de defender o seu trabalho e explicar cada passagem se isso for necessário. Desta forma favorece-se a exteriorização das ideias dos alunos, a explicitação dos seus raciocínios, a discussão de estratégias e resultados. As discussões em grande grupo estimulam o confronto de opiniões entre grupos e constituem momentos de aprendizagem significativa. São ainda importantes para que os alunos aprendam a valorizar mais a apresentação da sua forma de pensar e não apenas os resultados obtidos.

O papel da professora nestas discussões é o de moderadora, levantando questões que possam ter importância significativa e que não tenham sido apresentadas por nenhum grupo. Deste modo, as tarefas propostas tomam-se também uma forma de suscitar a introdução e apresentação de novos conceitos, através de sínteses teóricas, feitas pela professora depois de terminada a discussão da tarefa.

No final do semestre vai ainda ser aplicado um teste de avaliação escrito que servirá como elemento de avaliação individual dos alunos na disciplina.

Planeamento e caracterização das tarefas de investigação

Pretendi criar um conjunto de propostas escritas que dessem origem a actividades de exploração/investigação. Cabe ao professor realizar um trabalho cuidadoso na planificação e preparação de cada tarefa, tendo sempre presente o grau de maturidade matemático dos alunos. A elaboração de uma tarefa de exploração/investigação é uma actividade difícil principalmente se considerarmos a minha falta de experiência na criação deste tipo de tarefas e a falta de experiência dos alunos na sua realização. A pesquisa realizada foi, por isso, um factor determinante para compreender como poderiam ser elaboradas e como deveriam ser apresentadas aos alunos.

Segundo Varandas (2000), as opções tomadas pela professora na selecção, adaptação ou criação de tarefas a serem realizadas na sala de aula, são condicionadas pela pressão no que respeita ao cumprimento dos conteúdos a tratar na disciplina. Deste modo, é necessário optar por tarefas que tenham uma relação estreita com os conteúdos programáticos específicos da disciplina a leccionar e com o tempo disponível para a sua realização. Além disso, deverá haver uma articulação entre as tarefas investigativas e outro tipo de tarefas, como a resolução de exercícios e problemas e os momentos de exposição de temas matemáticos.

As tarefas devem ainda ter como objectivo a promoção de alguns aspectos da Matemática, como sejam, o raciocínio matemático, a comunicação e as conexões entre as várias áreas da Matemática (NCTM, 1991/94). Assim, os temas das tarefas a elaborar, devem permitir desenvolver nos alunos as competências explicitadas nos documentos oficiais.

É necessário ainda garantir que as tarefas sejam apropriadas para todos os alunos e não só para alguns, pelo que as suas aptidões e interesses e o conhecimento sobre a aprendizagem da Matemática são também factores a ter em conta na escolha dos temas a abordar e na elaboração das tarefas: “as boas tarefas são aquelas que não separam o pensamento matemático dos conceitos matemáticos ou aptidões, que despertam a curiosidade dos alunos e que os convida a especular e a aprofundar as suas intuições” (NCTM, 1991/94, p. 27). As tarefas de investigação a serem trabalhadas na sala de aula foram sendo progressivamente por mim elaboradas com a finalidade de serem usadas nesta experiência. A minha opção foi propor tarefas contextualizadas na vida quotidiana dos alunos, que constituíssem formas de permitir abordar conceitos e métodos a estudar

na disciplina de Análise Numérica e que tivessem em conta o tempo disponível para a sua concretização na sala de aula. A concepção das actividades e a recolha de carácter científico acerca dos temas nelas tratados foram baseados em diversas fontes bibliográficas que se indicam nas referências.

A elaboração das tarefas iniciou-se com o planeamento de cada uma relativamente ao conteúdo que se pretendia trabalhar e com que ênfase. Este aspecto foi fundamental para o planeamento das actividades lectivas, já apresentadas anteriormente (anexo 1), no que diz respeito aos conteúdos programáticos a serem abordados e à sua distribuição ao longo dos tempos lectivos disponíveis durante o semestre. Deste modo, elaborei quatro tarefas cujos enunciados se encontram nos anexos 2, 3, 4 e 5:

1. *A arte de marinheiro*, relacionada com a aritmética intervalar;
2. *Águas ameaçadas*, abordando a temática das equações não lineares;
3. *Ainda os lagos...*, focalizada no ajustamento de funções;
4. *Quem vai para o mar...*, inserida no domínio do cálculo integral.

Seleccionado o conteúdo programático que serviu de base a cada tarefa foi necessário preparar um ponto de partida para a mesma, razoavelmente objectivo, que permitisse que o estudante iniciasse o trabalho de exploração, sob diversos pontos de vista, procurando novos exemplos, propondo e resolvendo problemas relacionados. Depois do aluno estar encaminhado, foi necessário estimulá-lo a experimentar e a criar diversas estratégias através do planeamento de um desenvolvimento suficientemente rico. Desta forma tentei levar o aluno a generalizar um resultado matemático ou a considerar outras possibilidades que ampliariam o seu olhar sobre o tópico, acrescentando aspectos novos e criando conexões.

O formato das quatro actividades de investigação utilizadas nas aulas, durante o período de intervenção, corresponde a uma estrutura idêntica. A tarefa vai ser apresentada ao aluno suportada por um texto escrito que apresentava uma situação da vida real e, portanto, extra-matemática, mas simplificada por forma a que o seu tratamento fosse acessível. Estes textos terão como objectivo tentar enquadrar o aluno, o mais possível, na situação problemática e servir de ponto de partida para um conjunto de questões posteriores e que constituem suporte para o desenvolvimento da investigação. Uma segunda parte constituída por várias questões de exploração, directamente relacionadas com a situação apresentada e que pretendem constituir uma forma de activação de alguns processos de pensamento, dos quais se destaca a interpretação da situação real e a exploração de tópicos de Análise Numérica

decorrentes da identificação e utilização de conceitos e métodos matemáticos na resolução das situações descritas.

O grau de estruturação das tarefas é um aspecto crucial para o seu sucesso. Foi, por isso, um assunto considerado na sua elaboração e sobre o qual é importante reflectir. A definição do nível de estruturação adequado para uma tarefa de investigação é sempre dependente das experiências anteriores dos alunos e do professor. Este aspecto deve ser considerado na fase de concepção da tarefa e não deve constituir, por si só, um factor para avaliar a qualidade de uma investigação (Porfírio & Oliveira, 1999). Algumas das questões encontradas nas tarefas deste projecto orientam o trabalho dos alunos de forma a que eles não se sintam perdidos e que identifiquem um conjunto de 'coisas a fazer'. Apesar desta característica poder contrariar um pouco a natureza da actividade, penso que será favorável aos alunos, especialmente porque não estão familiarizados com as actividades de investigação.

Todas as tarefas fazem um apelo à descoberta matemática e têm objectivos de carácter geral comuns. Incidem sobretudo em questões que permitem: (i) reconhecer num problema as questões de natureza específica da Matemática; (iii) estabelecer conexões com situações do dia-a-dia em que utilizem o mesmo tipo de raciocínio matemático; (ii) estabelecer conexões entre tópicos da Matemática e (iv) compreender o significado de conceitos e métodos e utilizá-los no contexto de uma situação problemática. Relativamente aos conteúdos escolhidos, cada tarefa tem ainda objectivos específicos, apresentados numa breve descrição das tarefas elaboradas.

Tarefa 1 – Arte de marinhoiro. A tarefa 1 envolve os alunos numa tarefa de natureza exploratória em que se pretende abordar conceitos e regras da aritmética intervalar. Nesta tarefa é colocado um problema concreto cuja situação real é bastante conhecida pelos alunos e é proposta inicialmente a exploração de casos particulares de operações elementares conhecidas (adição, subtracção, multiplicação e divisão) utilizando intervalos de números reais. Apela a conhecimentos sobre as propriedades dos números reais e é sugerida a procura de generalizações. É um exemplo de uma tarefa em que se pretende a identificação de regras e por isso se torna necessário a elaboração e teste de conjecturas.

Tarefa 2 – Águas ameaçadas. Na tarefa 2 é apresentado um modelo matemático que traduz o fenómeno descrito e está na base da primeira questão. É proposta a construção de gráficos e sua interpretação para ajudar o desenvolvimento das questões seguintes que se focalizam em saberes na área da análise matemática. Esta tarefa

constitui um exemplo de possibilidade de utilização da calculadora como meio auxiliar não só de cálculo, mas de visualização da informação disponibilizada. É ainda sugerida a procura de generalizações para os procedimentos efectuados de forma à dedução de um método de resolução de equações não lineares. Aos alunos cabe encontrar um processo que não conhecem à partida e que permita responder às questões que lhes são colocadas.

Tarefa 3 – Ainda os lagos... Pretende-se, nesta tarefa, envolver os alunos numa situação em que necessitam de recorrer à noção de função e a conhecimentos prévios de interpolação e geometria analítica. A tarefa de investigação propriamente dita consiste em analisar o comportamento de um conjunto de dados iniciais, oriundos de uma experiência real com significado para os alunos, e seleccionar, dentro dos modelos por eles conhecidos, a função que melhor descreve esse comportamento. Propõe-se a construção de modelos matemáticos para as situações contextualizadas usando tabelas e expressões analíticas. É necessário definir critérios e tomar decisões com base em conhecimentos anteriores e identifica-se claramente a possibilidade das explorações dos diversos alunos tomarem direcções distintas, conduzindo a diferentes conclusões. Também nesta tarefa a utilização da calculadora pode tornar-se significativa.

Tarefa 4 – Quem vai para o mar... O objectivo da tarefa 4 compreende a exploração de várias situações, reforçando as aprendizagens desenvolvidas na tarefa anterior relativamente aos métodos já estudados de interpolação e ajuste de curvas, levando os alunos a reconhecê-las independentemente de trabalharem noutro domínio. Os alunos são solicitados a calcular o valor de um integral de uma função que apenas é conhecida para alguns valores oriundos de uma situação real. É necessário a exploração de várias situações de forma poderem generalizar procedimentos e propor métodos de integração alternativos apropriados a cada situação. A pouca estruturação da tarefa possibilita diferentes percursos possíveis no desenvolvimento da tarefa que dependem dos conhecimentos mobilizados pelos alunos.

No quadro 1 seguinte apresenta-se um resumo das tarefas descritas relativamente aos objectivos e conteúdos abordados. Salienta-se ainda que a análise de erros é um assunto transversal a todo o programa da disciplina pelo que está presente em todas as tarefas.

Quadro 1 – Resumo dos objectivos específicos e conteúdos programáticos a abordar nas tarefas elaboradas

	Objectivos específicos da tarefa	Conteúdos
Tarefa 1	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar propriedades dos números reais • Explicar e compreender como é que essas propriedades afectam o resultado das operações com intervalos de números reais • Efectuar cálculos com intervalos de números reais • Deduzir regras para as operações elementares utilizando intervalos de números reais • Explicar e demonstrar alguma teoria importante sobre a aritmética intervalar 	Aritmética intervalar
Tarefa 2	<ul style="list-style-type: none"> • Construir e interpretar tabelas e gráficos relativos a funções não lineares • Calcular a raiz de uma equação não linear • Deduzir métodos de resolução de equações não lineares • Encontrar formas de quantificar os erros associados a estes métodos • Explicar e demonstrar alguma teoria importante sobre equações não lineares 	Equações não lineares
Tarefa 3	<ul style="list-style-type: none"> • Utilizar gráficos e tabelas para identificar o comportamento de conjuntos de dados • Explorar, descrever e generalizar relações entre números • Descrever o comportamento de um conjunto de dados utilizando modelos matemáticos • Compreender a utilização do método dos mínimos quadrados e as suas vantagens relativamente a outros métodos • Deduzir o método dos mínimos quadrados para ajustar diferentes modelos • Relacionar parâmetros do modelo com erros associados 	Ajuste de curvas
Tarefa 4	<ul style="list-style-type: none"> • Calcular o valor de um integral, usando vários métodos de integração 	Integração numérica
	<ul style="list-style-type: none"> • Deduzir diferentes regras numéricas para o cálculo integral • Relacionar o valor do integral com a regra utilizada para o seu cálculo • Demonstrar alguma teoria importante sobre métodos de integração • Compreender a variação do erro cometido na utilização das diferentes fórmulas desenvolvidas • Compreender as diferenças entre os métodos e aplicar esses conhecimentos na escolha do mais apropriado a cada situação 	

Instrumentos de avaliação

Quando se assume uma metodologia de ensino-aprendizagem é necessário equacionar o tipo de avaliação a seguir. Actualmente, a avaliação da aprendizagem é considerada um processo sistemático e contínuo cuja principal função é ajudar a melhorar a formação dos alunos. Como refere Santos (2002), a avaliação tem assumido, cada vez mais, uma função pedagógica como elemento regulador no processo de ensino-aprendizagem permitindo, quer ao professor quer ao aluno, acompanhar esse processo, detectando erros, falhas e verificando em que medida os objectivos definidos são atingidos.

Esta perspectiva da avaliação contrasta com a necessidade pontual de verificar o conhecimento para atribuição de uma classificação e com a realidade vivida nos nossos estabelecimentos de ensino. De uma forma generalizada, os professores são confrontados com a obrigatoriedade de classificar os alunos e estes conduzem a sua aprendizagem no sentido de passar nos exames. No entanto, a formalização da avaliação da aprendizagem, através de instrumentos adequados, poderá permitir ao professor a obtenção das informações necessárias relativas à evolução das aprendizagens dos alunos e a detecção de possíveis lacunas que precisem de ser ultrapassadas. Poderá permitir também aos alunos um melhor controlo sobre a sua própria aprendizagem.

As investigações são actividades de aprendizagem e, como tal, têm de ser avaliadas (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). A avaliação de um trabalho investigativo não é fácil e requer, da parte do professor, alguma abertura para integrar no seu sistema de avaliação diferentes tipos de instrumentos de avaliação que permitam avaliar as capacidades do aluno na realização deste tipo de tarefas. Tratando-se de uma actividade matemática complexa, a avaliação das actividades de investigação deve naturalmente envolver aspectos da ordem das atitudes, capacidades e conhecimentos. Os instrumentos de avaliação tradicionais, que verificam essencialmente a capacidade de memorização dos alunos (normalmente factos e conceitos isolados), não são adequados às aprendizagens que é suposto estes atingirem quando realizam actividades de investigação. Para Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999), “é sobretudo importante avaliar as atitudes dos alunos (persistência, auto-confiança...), e as suas capacidades (raciocínio, comunicação, espírito crítico, estabelecimento de conexões entre conceitos...)” (p. 103).

De acordo com os princípios enunciados, decidi que a classificação final a atribuir aos alunos deveria ser feita com base em diferentes tipos de instrumentos de avaliação, como sejam, os relatórios da investigação, a observação directa e o teste escrito.

Os *relatórios das tarefas de investigação* são produções escritas pelos alunos, onde estes descrevem, argumentam e criticam a exploração de uma dada tarefa ou situação de investigação. Uma vez que a avaliação dos alunos na realização destas actividades requer uma ênfase particular no processo e não somente no produto final, estes relatórios devem indicar tanto os resultados obtidos como a forma como os alunos os alcançaram, conforme salientam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003).

Se os alunos não estiverem habituados a realizar relatórios, é natural que se sintam confusos quando, pela primeira vez, lhes for feito esse pedido. Assim, e numa fase inicial, pode ser vantajoso fornecer aos alunos um conjunto de indicações precisas sobre o que se espera que eles incluam nos relatórios e apoiá-los na compreensão e concretização dessas indicações. Neste estudo, no início da implementação da proposta pedagógica será fornecido aos alunos, por escrito, um guião com as indicações relativas ao formato e conteúdo dos referidos relatórios (anexo 6).

De acordo com Santos (2002), o erro contém informação sobre o modo como o aluno tentou resolver a tarefa. Se este for apenas contabilizado, o aluno dificilmente compreende porque é que errou e o que é que tem de aprender para evitar repeti-lo. Assim, todos os relatórios serão devolvidos aos alunos com comentários detalhados sobre alguns aspectos e sugestões para novas estratégias de abordagem de forma a incrementar a qualidade dos mesmos e a permitir a evolução progressiva e contínua das aprendizagens dos alunos.

A avaliação destes documentos terá como referência os objectivos previamente definidos em cada tarefa e na sua classificação será utilizada uma tabela de descritores (anexo 7), elaborada por mim e conhecida pelos alunos, baseada nos parâmetros apresentados em Varandas (2003). Uma vez que as tarefas e os relatórios são realizadas em grupo, a classificação atribuída ao relatório será quantitativa (escala de 0-20), igual para todos os elementos do grupo e terá um peso de 40% na classificação final a atribuir aos alunos.

A *observação dos alunos* durante a realização da tarefa e na fase de apresentação das suas conclusões à turma é uma forma natural de avaliá-los quando eles trabalham numa investigação (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). A partir dessa

observação, o professor pode recolher muita informação sobre as atitudes dos alunos e o modo como eles mobilizam os conhecimentos matemáticos. As apresentações orais constituem uma situação de avaliação e aprendizagem, permitindo avaliar uma variedade de objectivos, incluindo as atitudes e valores, a compreensão do processo de investigação, a pertinência das estratégias, os processos de raciocínio, o uso de conceitos, as competências de cálculo e a capacidade de comunicação oral.

Deste modo parece-me pertinente que o envolvimento dos alunos na exploração das diversas tarefas investigativas e a participação nas discussões globais com o grupo turma também sejam aspectos a serem avaliados. A participação e empenho dos alunos é classificada em termos de sim ou não e terá um peso de 10% na nota final do aluno.

Os instrumentos descritos anteriormente são os que usualmente merecem mais atenção na avaliação das tarefas investigativas pois têm um valor acrescido na dimensão formativa da avaliação ao permitir desenvolver a auto-avaliação e um ambiente de crítica construtiva entre os alunos e entre estes e o professor. No entanto, a proposta pedagógica aqui apresentada contempla, além de tarefas investigativas, aulas de exposição de matéria e de resolução de exercícios que, como actividades de aprendizagem que são, também deverão ser avaliadas. Há ainda a considerar o facto da escola recomendar e, frequentemente, os alunos também reclamarem, que o processo de avaliação seja individualizado de forma a que cada aluno seja avaliado de acordo com as suas próprias metas.

Neste sentido, pretendo aplicar um *teste escrito de avaliação* no término da implementação das tarefas investigativas, que coincide com o final do semestre, cujo formato seja consistente com as diferentes vertentes de trabalho desenvolvido na disciplina. A sua concretização tem como principal objectivo analisar o desempenho global de cada aluno em questões centradas nos conteúdos abordados ao longo do semestre.

O teste será individual e cada aluno terá a possibilidade de consultar os seus apontamentos e utilizar a máquina de calcular como meios auxiliares e facilitadores na realização do mesmo. A classificação do teste será quantitativa (escala de 0-20) e terá um peso de 50% na classificação final a atribuir aos alunos.

CAPÍTULO 4

Metodologia

Opções metodológicas

Numa investigação, a escolha da metodologia a adoptar tem de estar relacionada com os seus objectivos e, em particular, com as questões a que se pretende responder. Este estudo pretende descrever e compreender os processos matemáticos utilizados pelos alunos do ensino superior na realização de actividades de exploração/investigação. Importa descrever de que forma estes alunos se envolvem em actividades como a exploração de hipóteses, a formulação e teste de conjecturas, a generalização e a demonstração de resultados. Constitui ainda uma preocupação relevante compreender quais os factores que influenciam estes processos em termos da natureza das tarefas, do ambiente de trabalho na sala de aula e das perspectivas, conhecimentos e motivações dos alunos. Existindo uma identidade entre a investigadora e a professora que orientou o trabalho dos alunos, pode considerar-se que se trata, também, de um estudo sobre a minha prática profissional.

Dado que tenho como objectivo compreender um fenómeno específico mas complexo, nas suas diversas dimensões e no seu contexto natural, optei por assumir uma abordagem de investigação do tipo qualitativa, com todas as características que lhe estão subjacentes e que são referenciadas por Bogdan e Biklen (1994): (i) a fonte directa dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; (ii) os dados recolhidos são na sua essência descritivos; (iii) o maior interesse é nos processos e não nos resultados; (iv) a análise dos dados é sobretudo indutiva; e (v) a maior preocupação é com as *perspectivas dos participantes*. Os dados recolhidos neste tipo de investigação são designados por qualitativos, na medida em que, além de serem ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, o seu tratamento estatístico é muito complexo ou mesmo impossível (Bogdan & Biklen, 1994).

Existem tipos diferentes de estudos qualitativos que, embora tendo características comuns, implicam métodos e procedimentos específicos. Em educação, e

em particular na educação matemática, os estudos de caso têm-se tomado cada vez mais comuns. Segundo Ponte (1994), o estudo de caso é uma metodologia de investigação de forte cunho descritivo, especialmente adequada quando se pretende estudar “uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico” (p. 3). Também Yin (2003) elege esta metodologia quando as questões do *como* e *porquê* são fundamentais, quando o investigador tem pouco controlo sobre os acontecimentos e quando o foco do estudo é um fenómeno que se passa em contexto real.

Tendo em conta que, neste trabalho, o objecto de estudo são as aprendizagens dos alunos do 2.º ano de licenciatura das duas turmas a quem lecciono a disciplina de Análise Numérica, foram constituídos como casos um grupo de quatro alunos em cada uma dessas turmas. Uma vez que não pretendo intervir mas apenas observá-los detalhadamente no decorrer da sua actividade, considero como unidade de análise os alunos em acção na realização de tarefas de investigação, no seu ambiente natural – a sala de aula. Esta é uma forma de adquirir uma percepção mais consistente do tipo de raciocínios, de interacções e de processos utilizados por estes alunos e de ter em conta a natureza particularística inerente à investigação qualitativa. Penso que esta abordagem pode criar condições para uma descrição mais rica dos processos matemáticos usados pelos alunos, permitindo acompanhar em detalhe a evolução dos seus raciocínios, o que pode ser importante para a respectiva compreensão e interpretação face aos objectivos da investigação.

A generalização dos resultados, entendida como a possibilidade de estender a outros contextos ou outras situações as conclusões retiradas de um determinado estudo de carácter particular, é uma das objecções frequentemente colocadas à utilização dos estudos de caso. Ponte (1994) refere que, no campo das ciências sociais e, nomeadamente, em educação, a complexidade das situações educativas e a multiplicidade de factores envolvidos (actores humanos, significados, intenções) sempre obstou a que a formulação de “leis gerais” e “generalizações verificáveis” fossem questões facilmente resolvidas. Por isso, não constitui objectivo deste trabalho a generalização das conclusões dele retiradas a outros casos, mas sim produzir conhecimento sobre casos muito particulares, que possa ser potenciador de novas hipóteses de trabalho relativamente ao ensino-aprendizagem da Matemática a nível superior.

Ponte (1994) salienta ainda, que é necessário definir critérios de qualidade para os estudos de caso, que reflectam as diferenças que existem entre os objectivos desta metodologia e os propósitos prosseguidos por outras metodologias de investigação. As questões sobre a credibilidade (validade e fiabilidade) de um estudo são, talvez, as que mais se destacam em discussões realizadas por diferentes autores (Cohen & Manion, 1994; Goetz & LeCompte, 1984; Merriam, 1988; Yin, 2003).

O ambiente natural constitui a fonte directa dos dados numa investigação qualitativa. No entanto, a inclusão do contexto como uma parte importante do estudo cria problemas técnicos particulares, dado o elevado número de factores relevantes presentes. Além disso, o investigador constitui o principal instrumento de recolha de dados, o que levanta questões adicionais quanto à validade e fiabilidade do estudo. Segundo Yin (2003) isto arrasta a necessidade de múltiplas fontes de evidência e a necessidade de estratégias particulares para recolha e análise de dados. Para Goetz e LeCompte (1984) o investigador de um estudo de caso tem de ir ao encontro dos seus participantes e entrar no seu ambiente natural, onde precisará de permanecer durante tempo razoável em interação com os mesmos. Desta forma, acessibilidade a certos dados e a sua validade dependem estreitamente da colaboração e da relação de confiança estabelecida entre o investigador e os participantes. É no trabalho de campo que o investigador tenta compreender acontecimentos, de estrutura mais complexa, que de imediato não podem ser apreendidas (Bogdan & Biklen, 1994).

Estes argumentos mostram que a metodologia de estudo de caso representa, para o investigador, um elevado nível de exigência. De forma a ultrapassar estas limitações e no que concerne à credibilidade, utilizei as técnicas recomendadas pela generalidade dos autores: observação persistente e prolongada e triangulação dos dados. A introdução no campo não constituiu um problema uma vez que os sujeitos da investigação já eram meus alunos desde o ano lectivo anterior. Optei por uma abordagem objectiva, não dissimulada, solicitando a cooperação dos alunos e esclarecendo-os quais os objectivos do que pretendia fazer. Estes não colocaram quaisquer questões nem obstáculos durante a investigação. O meu duplo papel de professora e investigadora permitiu uma observação persistente e um envolvimento prolongado com os participantes, reflectindo-se na informalidade das conversas e dos modos de estar e ajudando a prossecução dos objectivos da investigação.

Uma vez que as tarefas de investigação foram trabalhadas por toda a turma, foi possível tirar partido de fontes múltiplas como observações, entrevistas, questionários,

gravações áudio e documentos produzidos pelos alunos. A técnica da triangulação consistiu em utilizar os diferentes métodos de recolha de dados e proceder ao seu cruzamento com o objectivo de verificar a consistência e coerência dos resultados. Quanto às conclusões apresentadas, estas foram lidas e reconhecidas pelos próprios participantes, aumentando o grau de confiança na verdade dos resultados.

Técnicas e procedimentos de recolha de dados

Como indiquei acima, neste estudo o trabalho de campo tem um papel fundamental. A fonte directa dos dados é o ambiente natural, a investigadora constitui o instrumento principal de recolha de dados e estes são obtidos em situação de contacto directo, mesmo que sejam utilizados equipamentos técnicos. Recorri a um leque alargado de fontes de informação de modo que os vários instrumentos de recolha de dados não só se complementassem mas também permitissem uma abordagem a partir de diversas perspectivas (Bogdan & Biklen, 1994). Assim, utilizei diversos instrumentos de recolha de dados seleccionados de entre as técnicas mais usadas na metodologia qualitativa: a observação; o questionário, a entrevista, as gravações áudio e a análise documental. A recolha dos dados empíricos foi feita durante o 1.º semestre do ano lectivo de 2005/06 tendo como base a proposta pedagógica definida.

Observação participante. As observações são cruciais como técnicas de recolha de dados em estudos de caso. Segundo Ludke e André (1986), a observação constitui uma importante ferramenta de trabalho que permite obter informação normalmente não acessível por outras técnicas, ocupando, por isso, um lugar privilegiado nas abordagens qualitativas. A observação tem a seu favor o facto de permitir registar comportamentos e acontecimentos à medida que estes vão ocorrendo. Possibilita ainda um contacto pessoal e estreito da investigadora com o fenómeno a investigar.

O papel de observador, no que respeita ao envolvimento do investigador com o objecto de estudo, pode assumir diversas modalidades. Merriam (1988) discute os diferentes graus de participação que podem ser adoptados pelo investigador no decurso das suas observações. Entre as duas posições extremas de observador “totalmente participante” e “meramente espectador” existe um contínuo e, muitas vezes, o grau de participação do investigador pode variar ao longo do estudo (Matos & Carreira, 1994). É necessário determinar a quantidade correcta de participação e o modo como se deve fazê-lo, tendo em atenção o estudo que se pretende elaborar. Neste estudo foi

previligiada a observação participante, em que simultaneamente a investigadora desempenha o papel de docente da disciplina. Este tipo de observação, sendo particularmente adequada para estudar quase todos os aspectos da interacção humana, permitiu compreender com mais detalhe os processos em que os alunos se envolviam na resolução de tarefas investigativas e as questões com que se defrontavam. Estive sempre consciente da dificuldade desta posição. Ao mesmo tempo que foi necessário participar no contexto em estudo de forma a conseguir compreender a situação como alguém que faz parte dela, foi preciso manter-me suficientemente desligada para o observar e analisar. A eventual subjectividade decorrente da minha personalidade, valores e sentimentos foi um factor ao qual prestei também especial atenção. Tentei que estes não interferissem negativamente na observação e interpretação dos acontecimentos, mas que pudessem constituir um veículo facilitador da investigação. Tentei ainda que a minha postura permitisse um desenvolvimento das actividades mais próximo possível do habitual de forma a não induzir, com a minha presença, modificações de comportamento dos alunos, diminuindo o chamado “efeito do observador”.

O relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experimenta e pensa no decurso da recolha e reflecte sobre os dados de um estudo qualitativo constituem as notas de campo. Para Bogdan e Biklen (1994), o êxito de um estudo de observação participante baseia-se em notas de campo detalhadas, precisas e extensas. No presente estudo, as notas de campo foram o registo sistemático das observações realizadas por mim sobre os acontecimentos na sala de aula, complementadas por reflexões pessoais sobre os acontecimentos observados. Durante a realização das tarefas de investigação, circulei pela sala para esclarecer os grupos e para observar, recolhendo informações pormenorizadas sobre as dúvidas geradas pelas tarefas e procurando perceber quais as estratégias usadas pelos alunos na sua resolução. No final das aulas elaborei registos onde tentei descrever episódios respeitantes às actividades desenvolvidas pelos alunos para me auxiliar a compreender como é que eles se envolvem neste tipo de actividades, nomeadamente como é que se lançam na formulação de conjecturas e o que fazem para as validar. Além disso, os registos contemplam a forma como as tarefas foram introduzidas, o tempo previsto e o tempo efectivamente gasto para a sua realização, bem como reflexões sobre aspectos que, a meu ver, se revelaram importantes para uma melhor planificação e condução das aulas deste tipo. Registei ainda, durante e no final de cada aula, as observações, as impressões recolhidas, algumas conjecturas sobre factos observados e sobre aspectos considerados inesperados, as declarações dos alunos

no decurso dos seus diálogos e as sucessivas intervenções de cada um dos membros do grupo em cada uma das questões presentes na actividade.

As notas de campo consistiram assim, em dois tipos de materiais. O primeiro, descritivo, permitiu detalhar o cenário em que o fenómeno em estudo decorreu, as actividades que lá se desenvolveram e as pessoas que participaram nessas actividades. Engloba informações sobre os participantes, reconstruções de diálogos, relatos de acontecimentos particulares, descrições de actividades e o comportamento do observador. O segundo tipo de materiais é reflexivo pois, para além das descrições, as notas de campo contêm registos que reflectem uma percepção mais pessoal do fenómeno em estudo.

Gravações áudio. Face aos objectivos da investigação, considerei importante para a compreensão e interpretação dos raciocínios dos alunos, uma descrição mais pormenorizada dos processos matemáticos por eles utilizados. Como todos os alunos foram observados em situação de sala de aula, foi necessário criar condições para garantir uma melhor captação das suas discussões e reacções no decorrer de cada uma das aulas de resolução de tarefas. Para tal utilizei, como unidade de observação, um único grupo de alunos de cada uma das turmas, dos quais fiz um acompanhamento detalhado da evolução dos raciocínios.

Com autorização dos alunos, foram colocados gravadores áudio junto destes dois grupos de observação e realizados os registos das aulas em que foram propostas tarefas de investigação. Estas gravações permitiram captar aspectos que de outra forma poderiam ter passado despercebidos e ao serem analisados mais tarde, fora do contexto da aula, forneceram clarificações importantes sobre o que realmente ocorreu.

Estava consciente das consequências que a introdução desta nova forma de registo e de recolha de dados poderia ter no comportamento dos alunos, constituindo, de certa forma, um obstáculo a uma recolha naturalista. Verifiquei, contudo, que o longo período de contacto com os alunos e a boa relação já estabelecida entre nós, foram factores determinantes para diminuir as possíveis perturbações e que as formas de trabalho e de registo foram-se, progressivamente, naturalizando.

Entrevistas. Já referi a dificuldade de um acompanhamento continuado dos dois grupos de alunos em observação durante a realização das tarefas e as consequências que este facto acarreta, nomeadamente a redução da perspectiva geral de funcionamento de toda a turma perante as tarefas de investigação e as aulas em que foram realizadas. Num estudo que visa a clarificação e a compreensão dos efeitos gerados pela introdução de

um conjunto de factores, em particular as actividades de exploração/investigação, é necessário diversificar as experiências com os alunos a observar. Daí o ter recorrido também a entrevistas.

Uma entrevista consiste numa conversa intencional entre duas ou mais pessoas, dirigida pelo entrevistador com objectivo específico de obter informação relevante para a investigação (Cannell & Kahn, 1968). Em investigação qualitativa, as entrevistas podem constituir a estratégia dominante para a recolha de dados ou podem ser utilizadas em conjunto com a observação participante, análise de documentos e outras técnicas (Bogden & Biklen, 1994). Assim, como complemento da observação e dos registos áudio feitos nas aulas, realizei, após a exploração, discussão e entrega de relatórios de algumas tarefas apresentadas, entrevistas com os dois grupos que constituem os estudos de caso.

A escolha do tipo de entrevista e o seu grau de estruturação depende do objectivo da investigação, podendo até ser usada mais do que um tipo, em diferentes fases de uma mesma investigação. De acordo com Bogden e Biklen (1994), as entrevistas qualitativas variam quanto ao grau de estruturação. Existe um contínuo desde a entrevista estruturada, em que o conteúdo e os procedimentos são organizados antecipadamente e o entrevistador tem pouca liberdade para alterações ao guião, até à entrevista não estruturada, onde o seu conteúdo e a sequência das questões estão inteiramente nas mãos do entrevistador. Neste estudo optei por uma entrevista semi-estruturada, guiada por questões gerais e centradas em tópicos determinados, em que evitei conduzir a entrevista e restringir a temática abordada, dando liberdade aos entrevistados para produzirem o seu discurso, de forma a obter a maior quantidade de informação possível.

Estas entrevistas foram realizadas em tempo extra-lectivo, em ambiente informal e, com a autorização dos alunos visados, foi feito o seu registo através de gravações áudio. Para conduzir as entrevistas com os alunos elaborei um guião, de acordo com os objectivos previamente definidos e que permitiu conversas mais ou menos abertas e naturais e a obtenção de dados que me pareceram significativos para clarificar alguns pontos de vista dos alunos sobre a Matemática e a realização das actividades de investigação e compreender melhor o seu desempenho nestas actividades e até que ponto o seu trabalho foi influenciado pela professora e pelos colegas. Nestas condições, os resultados das entrevistas incluem uma forte componente descritiva, na medida em

que procuram dar conta da trajectória percorrida pelos alunos dos grupos observados, ao longo das actividades realizadas.

Para que não surgisse algum mal-estar entre os alunos dos grupos que não fizeram parte do estudo, sentindo-se de alguma forma desfavorecidos por não serem entrevistados, disponibilizei-me para entrevistar todos os alunos que, voluntariamente, manifestassem essa vontade. Esta situação não ocorreu pelo que as entrevistas obtidas são apenas referentes aos dois grupos de estudo.

Questionários. Neste estudo, elaborei dois questionários com o objectivo de estudar a possível evolução ocorrida nas atitudes e concepções dos alunos sobre a Matemática em geral e a disciplina de Análise Numérica, em particular, como consequência da realização de actividades de investigação. A sua aplicação foi feita no início e no final da experiência pedagógica a todos os alunos das duas turmas, permitindo-me assim ter uma opinião individual em relação a alguns aspectos relacionados com a experiência realizada.

O questionário inicial é constituído só por questões fechadas, agrupadas em três temáticas principais: concepções dos alunos sobre a Matemática, hábitos de estudo e auto-imagem enquanto aluno de Matemática. Estas questões foram elaboradas especificamente para este questionário com base (i) em comentários de alunos relativamente à disciplina, colhidos em anos anteriores; (ii) em escalas de atitudes, referentes à Matemática e (iii) nas reflexões da docente da disciplina feitas em anos anteriores. Desta forma, foi possível fazer uma caracterização dos alunos no que diz respeito aos aspectos considerados essenciais do funcionamento de uma disciplina de Matemática, na perspectiva dos alunos.

Neste questionário utilizei uma escala de Likert, com 5 níveis (Tuckman, 2002): discordo totalmente, discordo parcialmente, não discordo nem concordo, concordo parcialmente e concordo totalmente. Solicitei aos alunos que manifestassem o seu grau de concordância ou de discordância relativamente a cada uma das questões que constituem o questionário.

No questionário final, as questões fechadas foram divididas em duas partes, de acordo com os objectivos pretendidos. Com as primeiras questões obtive as opiniões dos alunos sobre a experiência realizada nas aulas, relativamente às actividades propostas, às dificuldades sentidas e ao modo como se desenvolveu o processo de aprendizagem. As restantes questões referem-se aos aspectos já abordados no questionário inicial e permitiram uma análise das alterações verificadas nas concepções

e atitudes dos alunos sobre a Matemática durante a realização da experiência. A escala utilizada foi a mesma do questionário inicial. Além das questões fechadas inclui ainda neste questionário, algumas questões abertas, onde os alunos se puderam manifestar mais livremente em relação aos aspectos que consideraram positivos ou negativos e dar sugestões para uma implementação futura com sucesso.

Os questionários foram respondidos anonimamente porque, sendo simultaneamente investigadora e professora, considerei eticamente obrigatório garantir que as opiniões expressas pelos alunos não seriam identificadas. Desta forma, cada aluno pôde manifestar a sua opinião plenamente, sem o receio de qualquer tipo de represália ou estigma. Em especial, pretendia evitar que os alunos respondessem de acordo com aquilo que julgasse ser a expectativa da investigadora, dando respostas “politicamente correctas”. Assim, o anonimato foi também uma forma de assegurar a fiabilidade do instrumento.

Relatórios dos alunos. Os métodos de recolha de dados acima descritos consistem em processos em que o papel principal na produção cabe ao investigador. Este escreve as notas de campo, conduz as entrevistas e constrói os inquéritos. Embora não sejam tão utilizados, os materiais que os participantes do estudo produzem por si próprios também podem ser usados como dados. A importância de recolher informações a partir da análise de documentos é referida por vários autores. Merriam (1988) salienta que essa importância advém do facto de estes serem produzidos habitualmente de forma independente dos propósitos da investigação, o que não acontece com as entrevistas e as observações. Yin (2003) refere que os documentos são uma fonte de recolha de dados de grande importância porque permite corroborar ou confirmar inferências sugeridas por outras fontes de dados. Neste trabalho, a análise dos documentos centra-se, essencialmente nos relatórios produzidos pelos alunos sobre a exploração das tarefas de investigação propostas.

Os relatórios foram produzidos em grupo, em tempo extra-lectivo e constituem documentos cuja análise permitiu verificar e complementar as observações efectuadas por mim na sala de aula. Os relatórios produzidos pelos alunos evidenciaram as diferentes estratégias de exploração da tarefa e as dificuldades por eles sentidas neste tipo de actividades.

Em síntese, a metodologia de recolha de dados não se extingue na observação das actuações dos alunos no decurso das actividades de investigação em tempo lectivo. Pelo contrário, envolve a utilização de múltiplas estratégias (i) a observação de dois

grupos de alunos, um de cada turma envolvida, na realização de actividades de investigação, em situação de sala de aula; (ii) as notas de campo respeitantes à actividade desenvolvida pelos alunos nas aulas de carácter investigativo; (iii) as entrevistas aos alunos dos grupos de estudo, no final da realização das actividades de investigação; (iv) os relatórios escritos no final da exploração de cada tarefa e (v) os questionários aplicados a todos os alunos, antes e depois da experiência realizada, sobre as suas percepções da Matemática e opiniões sobre a nova metodologia de ensino-aprendizagem implementada. Esta variedade de dados permitiu a triangulação dos resultados emergentes, com vista à consistência da própria informação recolhida e das interpretações produzidas.

Participantes

Os participantes foram os alunos do 2.º ano dos vários cursos de licenciatura ministrados na Escola Naval (EN), em Almada. Esta escola é um Estabelecimento Militar de Ensino Superior, com cerca de 250 alunos, que apresenta características de funcionamento muito particulares. Os alunos são seleccionados à entrada através das classificações obtidas nas provas nacionais de acesso ao ensino superior e nas provas específicas à instituição (testes médicos, físicos e psicotécnicos). Além da remuneração mensal que auferem, todas as despesas inerentes à formação dos alunos são pagas pela instituição (alimentação, vestuário, material didáctico, etc...). Por isso, não é permitido reprovar a qualquer das disciplinas curriculares sob pena de terem que repetir todo o ano lectivo, o que também só é permitido em casos excepcionais e apenas uma vez em toda a duração do curso (4 anos).

A escolha destes alunos participantes foi intencional de modo a reunir as melhores condições para realizar a experiência. Vários factores estiveram na base desta selecção: (i) trata-se de alunos aos quais lecciono a disciplina; (ii) já tinham sido meus alunos nos dois semestres anteriores e (iii) constituem um exemplar de plateia típica da disciplina de Análise Numérica.

De um modo geral, o ambiente de trabalho dentro e fora das aulas é tranquilo. Os alunos têm um bom relacionamento entre si e, quando motivados, são considerados empenhados e trabalhadores com um aproveitamento razoável nas disciplinas de Matemática. Estas condições são criadas pelo cumprimento das regras impostas pelo

regime militar em que estão inseridos e pelo apoio disponibilizado por um corpo docente estável e conhecedor da 'casa'.

Os alunos estão divididos em duas turmas, consideradas idênticas no que diz respeito a comportamento e aproveitamento escolar. Relativamente ao aproveitamento escolar dos alunos, nas disciplinas de Matemática do ano anterior, existe uma grande amplitude de resultados, o que reflecte o carácter bastante heterogéneo da turma. Observei ainda que, regra geral, há uma grande consonância entre as classificações obtidas pelos alunos em Matemática e nas outras disciplinas.

Na generalidade, os alunos revelam um espírito curioso e interessado por aquilo que se passa à sua volta, aderem com entusiasmo às actividades extra-curriculares organizadas na e pela escola e são, por norma, participativos e cumpridores. O facto de haver um conjunto de alunos bastante bons que se mostram sempre muito interessados, participativos e capazes de colocar questões, cria um grande dinamismo nas interacções dentro da sala de aula. A reacção dos alunos a propostas de trabalho diferentes do tradicional é, regra geral, muito boa, com uma grande participação no trabalho desenvolvido nas aulas de Matemática. A minha impressão sobre os alunos, baseada na forma como estes se manifestavam nas aulas, é, em quase todos os casos, muito melhor do que os resultados obtidos por eles obtidos em testes escritos de avaliação. A maior parte dos alunos estava familiarizada com a utilização de máquinas de calcular.

Os grupos de trabalho foram formados espontaneamente pelos alunos e, tal como na globalidade da turma, apresentavam grande heterogeneidade nos seus elementos. A escolha do grupo de estudo, em cada uma das turmas, foi feita por voluntariado e com o acordo de toda a turma. Uma descrição mais pormenorizada dos dois grupos que serviram de base à presente investigação e que foram objecto dos estudos de caso, é feita no capítulo respectivo.

Procedimentos de análise de dados

A análise dos dados começou a ser realizada durante a sua recolha mas foi depois desta ter terminado que teve o seu momento mais forte. As notas de campo constituíram o primeiro nível de análise de dados, realizada ainda durante a fase de recolha. Esta análise teve especial relevância para perceber, entre outros aspectos, se os processos evidenciados pelos alunos dependiam da estruturação da tarefa ou da forma como era apresentada e de que forma as interacções e a mobilização de conhecimentos e

competências eram influenciadas pela existência ou não de uma discussão e apresentação em grande grupo. A descrição do que tinha sido observado na sala de aula revelou, assim, aspectos importantes susceptíveis de serem alterados ou aprofundados, quer em relação à turma em geral, quer em relação aos alunos dos grupos objecto dos estudos de caso.

Durante o trabalho de campo ocorreu ainda outro nível de análise de dados, que precedeu a realização de entrevistas realizadas aos alunos dos grupos em estudo. Após a realização de algumas das tarefas de investigação propostas, foi necessário estruturar um conjunto de questões que constituíram o eixo orientador das entrevistas realizadas e que tinham como objectivo uma melhor compreensão do desempenho dos alunos nas propostas de trabalho realizadas na sala de aula, do relatório e da aula de discussão e as influências que o trabalho do grupo poderá ter sofrido. Estas entrevistas foram preparadas com base na análise das notas de campo e dos relatórios elaborados pelos grupos, depois de identificados os pontos que precisavam de ser explorados ou esclarecidos.

A segunda fase de análise, mais profunda e estruturante, ocorreu após terminada a recolha de dados e pretendeu dar resposta às questões de estudo. Segundo Yin (2003), a análise de dados deve seguir os aspectos teóricos que orientaram as questões de estudo, a selecção dos casos a estudar e a recolha de dados. Tendo presente que este estudo pretendeu focar a atenção nos processos matemáticos utilizados pelos alunos na realização de tarefas de investigação, de modo a fornecer os elementos indispensáveis para a compreensão dos factores que influenciam estes processos, em termos de natureza das tarefas, do ambiente de trabalho na sala de aula e das perspectivas, conhecimentos e motivação dos alunos, a análise de dados estruturou-se naturalmente em dois pontos: um relativo à exploração das tarefas investigativas e o outro sobre os aspectos mais directamente relacionados com as concepções dos alunos em relação à Matemática e à metodologia de ensino-aprendizagem adoptada.

As notas de campo, os registos áudio do trabalho dos alunos dos grupos em estudo, na sala de aula e os relatórios escritos por eles elaborados, constituíram a base da análise que permitiu estruturar o desempenho dos alunos na exploração das tarefas de investigação. Todo o material foi organizado por grupo de alunos, separado por tarefa de investigação e lido atentamente para ter uma visão de todos os dados no seu conjunto, tendo sempre presente os objectivos do estudo e portanto as questões a que pretendia dar resposta. Comecei por passar em revista, tarefa por tarefa, as notas de

campo relativas às aulas de exploração das mesmas e em seguida ouvi os registos áudio e transcrevi diversas partes que considerei significativas. Finalmente, analisei os relatórios dos alunos anotando nas margens aspectos que permitissem identificar e discriminar os processos matemáticos utilizados, as aprendizagens realizadas, os factores que os influenciaram e as principais dificuldades sentidas pelos alunos na realização deste tipo de actividades. Esta categorização facilitou a construção dos dois casos estudados.

Em cada estudo de caso correspondente ao trabalho de um grupo nas quatro tarefas de investigação optei por um esquema essencialmente descritivo para a sistematização dos dados. Assim, depois de uma breve caracterização do grupo, apresento o desenvolvimento do trabalho do grupo ao longo das diferentes fases da aula de trabalho investigativo e da elaboração dos respectivos relatórios. No final da apresentação do trabalho do grupo em torno de cada tarefa fiz uma síntese dos resultados mais relevantes do ponto de vista da investigação. Na descrição apresentada, a maior relevância recaiu sobre os processos desenvolvidos durante a realização das actividades investigativas, mais do que sobre os resultados ou os produtos obtidos. Este processo inclui, ainda, excertos exemplificativos, retirados dos relatórios elaborados pelos alunos e dos registos áudio, de forma a ilustrar as ideias expressas nas descrições ou resultados. De forma a preservar a riqueza dos dados, respeitei também a forma como foram registados.

Os questionários inicial e final, aplicados a todos os alunos, constituíram importantes referências relativamente à influência das actividades de investigação nas concepções e atitudes dos alunos face à Matemática. A análise dos questionários, realizada também após o trabalho de campo, foi feita questão a questão, utilizados procedimentos básicos descritivos. Os dados relativos às questões fechadas sofreram um tratamento quantitativo, resumindo as escolhas dos alunos em tabelas de frequências. Para as questões abertas usei uma análise de conteúdo, sendo os resultados descritos resumidamente através de excertos e citações de respostas apresentadas pelos alunos.

CAPÍTULO 5

Descrição da Experiência

Início da experiência

A proposta pedagógica anteriormente descrita foi posta em prática nas duas turmas do 2.º ano dos cursos de licenciatura da Escola Naval, na disciplina de Análise Numérica, durante o primeiro semestre do ano lectivo de 2005/06 que teve início a 12 de Setembro.

Os alunos participantes neste estudo já me tinham tido como professora no ano lectivo anterior, nas disciplinas de Análise Matemática I e II. Havia, portanto, um conhecimento mútuo e desenvolveu-se uma boa relação entre mim e os alunos. Este facto, além de dispensar as apresentações iniciais, frequentemente realizadas na primeira aula do semestre, facilitou a intervenção experimental.

Na primeira aula expliquei aos alunos o que me propunha fazer, quais os objectivos e a metodologia de trabalho a ser utilizada, enfatizando o facto de que isso só seria possível com a sua colaboração. Solicitei ainda autorização para utilizar as aulas para recolha de informação necessária à minha investigação decorrente deste projecto, tendo obtido uma resposta afirmativa de todos os alunos.

Uma vez que nas aulas dedicadas à realização das tarefas de investigação os alunos iriam trabalhar em grupo, foi necessário proceder à constituição dos grupos. A escolha dos elementos de cada grupo foi feita entre eles, sem critério determinado, com base nas suas afinidades. Acabaram por se formar grupos heterogéneos (de três e quatro elementos), tanto a nível de aproveitamento escolar em Matemática como em relação às próprias personalidades. Uma das turmas, que designei por turma 1, era constituída por 27 alunos que ficaram distribuídos em 7 grupos, seis de 4 elementos e um de 3 elementos. Os 23 alunos da turma designada por turma 2 foram distribuídos em 6 grupos, cinco de 4 elementos e um de 3 elementos.

Terminada a organização dos alunos por grupos, informei-os que para o trabalho de investigação que me propunha fazer era necessário analisar um grupo de cada turma, durante a realização das tarefas de investigação e que essa observação passava pela

gravação áudio do trabalho desenvolvido por esse grupo nessas aulas. Nesta fase houve alguma agitação. Expliquei que, por uma questão de ética e para que não houvesse diferenciação de alunos, o grupo de estudo teria que ser voluntário. Numa turma apenas um grupo se voluntariou. Na outra turma, houve dois grupos voluntários mas que chegaram a um consenso sobre aquele que participaria no estudo. Os grupos de análise eram ambos compostos por quatro elementos.

No início das aulas, dei igualmente indicações relativamente à planificação, programa, bibliografia e avaliação da disciplina. Assim, apresentei o programa da disciplina, o planeamento das actividades lectivas e alguma bibliografia relevante e relativa aos conteúdos a abordar, em particular um livro adoptado como manual. Referi ainda a disponibilização, na intranet (rede interna da Marinha, semelhante à internet, a que os alunos têm acesso), de um conjunto de enunciados de problemas e exercícios que iriam servir de base às aulas de resolução de exercícios. Indiquei, ainda, os instrumentos de avaliação a utilizar e, relativamente aos relatórios das tarefas de investigação distribuí, por escrito, um conjunto de indicações para a sua elaboração e explicitiei os critérios de avaliação dos mesmos.

Esta experiência envolveu uma combinação de aulas de actividades de exploração/investigação, de aulas expositivas de apresentação de conceitos teóricos e outras aulas, ainda, de resolução de exercícios de consolidação de conhecimentos, de acordo com a planificação já apresentada e que foi cumprida. Uma análise detalhada das actividades realizadas pelos alunos seria inevitavelmente extensa e repetitiva. Apresento apenas uma perspectiva geral sobre estas actividades, procurando evidenciar a sua evolução ao longo do semestre e descrever as principais reacções dos alunos relativamente à colocação em prática desta nova metodologia de ensino-aprendizagem.

As aulas com tarefas investigativas

As tarefas investigativas realizadas pelos alunos foram elaboradas, de acordo com o planeamento, tendo em conta o tempo disponível para a sua concretização na sala de aula e a oportunidade da sua utilização relativamente aos conceitos e métodos a estudar. Nas quatro tarefas de exploração/investigação realizadas em cada uma das turmas, os alunos trabalharam sempre em grupos, apoiados pela máquina de calcular gráfica.

Iniciei a primeira aula de actividades investigativas com uma pequena explicação de qual o comportamento que os alunos deveriam ter ao trabalharem em grupo e neste tipo de actividade. Tentei deixar claro, também, o facto de nestas tarefas não haver resoluções certas ou erradas, mas que eram os processos, as conjecturas levantadas e os argumentos produzidos para justificar o percurso feito e as conclusões conseguidas que importava explorar e constituíam finalidades de aprendizagem.

A realização de cada uma das tarefas envolveu três fases em sala de aula: a introdução da tarefa, a exploração da tarefa e a apresentação das conclusões dos alunos e sua discussão. A introdução das tarefas iniciou-se sempre com a distribuição dos seus enunciados, por escrito, acompanhada por breves indicações respeitantes ao modo de organização do trabalho, chamando-lhes a atenção para a necessidade de fazerem registos de todo o trabalho realizado de forma a facilitar a posterior escrita do relatório e futura discussão. Depois de distribuído um enunciado por cada aluno, verificava-se um tempo de silêncio em que todos liam o que era solicitado e tentavam perceber. O trabalho começava de imediato com todos os alunos dos grupos bastante envolvidos.

Na fase de exploração da tarefa, começou por se notar a falta de hábito dos alunos em realizar trabalho de natureza investigativa na sala de aula, pois nas primeiras dificuldades esperaram que a professora lhes dissesse o que era para fazer sem se esforçarem muito em tentar compreender a tarefa. Algumas vezes procedi a explicações e esclarecimentos para toda a turma, através de questões e do pedido de explicações, sobretudo quando detectei dificuldades generalizadas. Pontualmente, considerei necessário fornecer sugestões mais directas, para que o trabalho dos alunos pudesse avançar e não provocar desmotivação. Os alunos têm necessidade de sentir que estão a corresponder ao que deles se espera e, por isso, é natural que, colocados perante uma actividade desconhecida, sintam alguma insegurança por não saberem o que têm de fazer para 'fazer bem'. Esta preocupação foi bastante notória quando, já numa segunda fase, me solicitavam, explicavam os diferentes passos para chegar às conclusões e esperavam aprovação. Pretendi, no entanto, que a minha intervenção fosse sempre no sentido de incentivar as discussões com comentários que não indiciassem uma conclusão ou um 'modo de fazer', procurando mostrar assim que esperava uma atitude de maior independência da sua parte.

No decurso das aulas que envolveram estas actividades apoiei e supervisionei o trabalho dos grupos. Os alunos fizeram questão de dar oportunidades iguais a todos os

elementos do grupo para colocar as suas sugestões, apesar de nem sempre as discutirem nem interrogarem antes de as aceitarem.

No final da fase de exploração de cada tarefa os alunos elaboraram, também em grupo mas em período extra-lectivo, o respectivo relatório da actividade, apoiados pelas indicações já disponibilizadas por mim. Inicialmente, os relatórios produzidos pelos alunos apenas apresentavam uma versão final do trabalho realizado, sem indicação das explorações feitas nem das várias estratégias seguidas. A correcção dos relatórios, através dos meus comentários, incentivando os alunos a apresentarem a descrição dos procedimentos utilizados, a exploração de ideias originais, as tentativas de justificação e, até mesmo, uma apreciação da tarefa, revelou-se fundamental para a mudança das concepções dos alunos relativamente ao que deve ser incluído num relatório.

Nas aulas de discussão das tarefas, desempenhei o papel de orientadora da actividade e os alunos intervieram bastante, de uma forma ordeira e respeitando-se sempre. Durante estas aulas, procurei que todos os grupos tivessem a oportunidade de argumentar e explicar as suas estratégias e resoluções, permitindo que os restantes alunos interpelassem os colegas. Na apresentação das várias explorações, os alunos de cada grupo apresentavam os resultados em que tinham estado a trabalhar, utilizando o quadro. Quando foram colocadas questões pelos colegas, às vezes desculpavam-se com o facto de ter sido outro elemento do grupo a sugerir o registo, mostrando que este tinha sido aceite sem ser apresentada argumentação e remetiam-lhe a demonstração do caminho seguido. Foram ainda aproveitados os erros que foram surgindo para explorar conjecturas falsas e conceitos erróneos. Algumas vezes estas discussões permitiram uma exploração de outros assuntos relacionados que suscitou a introdução de conteúdos programáticos a serem desenvolvidos nas aulas expositivas.

Tarefa 1 – A arte de marinheiro

A tarefa 1 foi realizada, em ambas as turmas, na segunda semana lectiva, após uma aula expositiva e outra de resolução de exercícios sobre a análise de erros, tema transversal a todas as unidades programáticas.

Numa fase inicial, após a distribuição do enunciado da tarefa, dei algum tempo aos alunos para o lerem cuidadosamente e se familiarizarem com a situação. Em seguida, fiz uma apresentação da tarefa propriamente dita, explicando o que se pretendia e em que consistia a mesma. Relembrei qual o comportamento que os alunos deveriam adoptar ao trabalharem em grupo e neste tipo de tarefa e chamei-lhes também a atenção

para a necessidade de fazerem registos de todo o trabalho realizado. Esta fase demorou cerca de 10 a 15 minutos da aula, tempo após o qual os alunos começaram a trabalhar entusiasmados.

De facto, os alunos começaram por ler e analisar uma situação da vida real, traduziram essa situação em linguagem matemática, experimentaram diferentes valores e argumentaram com base nos cálculos por eles efectuados e na situação real apresentada. A primeira questão da tarefa era directa e apenas requeria alguns cálculos, não suscitando por isso dúvidas. Foi durante a realização da tarefa, ao deslocar-me entre os grupos para observar o seu trabalho, que verifiquei dificuldades na questão 2, de exploração, relativamente ao que 'era para fazer'. A maior parte dos grupos passou para a questão seguinte, não tendo considerado importante a sequência das questões no desenvolvimento da tarefa. Chamei a atenção para este facto, em voz alta para toda a turma, recomendando-lhes que explorassem várias hipóteses e tentassem verificar alguma coisa a partir daí. Este incidente desencadeou um pedido de solicitações posteriores, por parte dos diversos grupos para verificar e legitimar o que estava a ser feito. As perguntas foram remetidas para os grupos, novamente.

Durante a exploração da tarefa todos os elementos dos grupos colaboraram no trabalho dando as suas opiniões e tendo o cuidado de registar o que iam fazendo. O tempo de 100 minutos, inicialmente previsto para a exploração da tarefa, não foi suficiente. Penso que a inexperiência dos alunos neste tipo de trabalho terá sido o factor que mais contribuiu para este facto.

Na aula seguinte os alunos tiveram mais 50 minutos para terminar a actividade. Verifiquei que alguns grupos se tinham encontrado em horário extra lectivo para avançar na exploração da tarefa, afastando assim o meu receio inicial de que os alunos se pudessem sentir desmotivados com o prolongamento da tarefa.

Durante os restantes 50 minutos desta aula deram início à elaboração do relatório, terminando depois em horário extra-lectivo. A maior dificuldade sentida pelos alunos na realização deste documento, foi a tradução para linguagem corrente do trabalho desenvolvido, demonstrada com a frase seguinte: 'o pior é o português...'. Isto foi confirmado depois no reduzido desenvolvimento que os relatórios apresentavam e na tendência para mostrar só os resultados que consideravam estarem correctos.

A discussão da tarefa durou cerca de 100 minutos. Discutiram-se todas as questões, não sendo necessário solicitar aos grupos a sua contribuição. Eles próprios

participaram activamente, completando o trabalho dos outros ou apresentando estratégias diferentes das utilizadas.

Tarefa 2 – Águas ameaçadas

A tarefa 2 iniciou-se, novamente, com a distribuição do enunciado escrito, que foi lido individualmente pelos alunos antes do começo do trabalho em grupo e sem que eu fizesse a apresentação da mesma. Reforcei a necessidade dos alunos fazerem registos de todo o trabalho realizado embora eles próprios tenham sentido essa necessidade uma vez que durante a realização da tarefa tiveram o cuidado de ir registando e documentando todos os passos.

Nesta segunda tarefa, a questão 1 começou por suscitar dúvidas porque os alunos não conseguiram interpretar a equação dada. Só ao fim de algum tempo e depois de eu ter chamando a atenção para o facto de poderem usar as máquinas calculadoras para tentar visualizar os dados, é que eles começaram a trabalhar. Embora todos os grupos tivessem máquina de calcular gráfica, foi nítida a falta de experiência, de alguns grupos, no seu manuseamento, que acabou por ser superada com a ajuda entre os grupos.

As restantes questões eram mais abertas com pouca informação acerca do processo de investigação e os alunos perderam-se um pouco. Solicitaram várias vezes a minha presença para perguntar, ‘o que é para fazer?’ e ‘por onde começamos?’. As questões foram respondidas com outras questões e começaram a explorar. Nesta fase de desenvolvimento da tarefa, os alunos organizados em grupos foram, com bastante entusiasmo, discutindo e tentando encontrar estratégias para responder às questões colocadas. No final da aula, o trabalho realizado pelos alunos era pouco visível, pois necessitaram de muito tempo para compreender a situação inicialmente descrita. Os ritmos de trabalho dos diversos grupos dentro da sala de aula também foram muito diferentes, surgindo dificuldades a vários níveis que variavam de grupo para grupo. Apesar das dificuldades iniciais, surgiram várias estratégias de resolução que só puderam ser exploradas mais aprofundadamente na aula seguinte porque os 100 minutos disponibilizados para a realização desta tarefa não foram suficientes.

Inicialmente só me dirigi aos grupos quando solicitada. Mais tarde dirigi-me a eles para os questionar sobre a evolução da tarefa. Enquanto circulava na sala, por entre os grupos, observei que alguns deles estavam a recorrer ao manual adoptado para tentar

obter ideias de possíveis estratégias e utilizavam os métodos nele descritos para responder às questões colocadas. Aproveitei este facto para os questionar sobre o significado que faziam das fórmulas e métodos que estavam a usar e reforcei a importância das explorações neste tipo de trabalho e na aprendizagem. Notei também o empenho dos alunos na utilização dos conceitos e métodos adquiridos nas aulas expositivas para desenvolverem as suas estratégias.

Os relatórios de alguns grupos continuaram pouco desenvolvidos. Os alunos mostravam continuar a não perceber que o importante são as explorações e as justificações do que fazem e a concentrar-se apenas na apresentação dos 'resultados mais correctos'. Há no entanto diversos grupos em que se verifica um progresso significativo na descrição do trabalho realizado, tendo apresentado não só as estratégias que pensam serem as correctas mas também aquelas que consideram menos bem conseguidas.

Depois seguiu-se a discussão, muito participada por todos os grupos, que durou cerca de 100 minutos. Alguns grupos deram conta de alguns resultados e/ou conjecturas incorrectas e porque é que estavam incorrectas. Discutiram-se todas as questões e houve exploração adicional de outras questões colocadas por mim para introdução de novos conceitos e métodos. No final da discussão houve um grupo que reclamou o facto de outros terem ido ao livro e apresentar resultados como se fossem obtidos por eles através da exploração. Expliquei-lhes que tinha conhecimento do assunto e que os principais prejudicados seriam os próprios alunos, uma vez que perdiam uma oportunidade de aprendizagem e desenvolvimento das suas capacidades. Além disso, lembrei-lhes que a avaliação não era feita sobre o produto final mas sobre o desenvolvimento apresentado.

Tarefa 3 – Ainda os lagos...

A tarefa 3 encontrou algumas dificuldades na sua concretização que, embora ultrapassadas, fizeram com que se verificassem condições de realização distintas nas duas turmas. A planificação das aulas, ao longo do semestre lectivo, obrigou a que esta tarefa fosse proposta, nas duas turmas, em momentos diferentes da sequência dos conteúdos programáticos. Isto permitiu que uma das turmas tivesse mais 'ferramentas' à sua disposição para a realização da tarefa, que os alunos utilizaram de forma inteligente, e que influenciou significativamente a orientação da exploração que fizeram da mesma.

Outra desigualdade verificada entre as duas turmas relacionou-se com a falta de comparência de nove alunos, na aula. Uma vez que a maior parte dos grupos ficou reduzido a um ou dois elementos, foi feito um reagrupamento dos alunos de forma a produzir um mínimo de alterações possíveis. Assim, os alunos agruparam-se de acordo com os elementos que estavam presentes e quem estava sozinho integrou os restantes grupos a quem faltavam elementos. O grupo de estudo também passou a contar só com três elementos, todos presentes na aula, porque um dos alunos mudou de curso e consequentemente de turma.

Iniciei a aula com uma pequena apresentação oral da tarefa, de forma a que os alunos comesçassem mais rapidamente a fase de exploração. Esta tarefa revelou-se mais fácil, talvez por já não ser a primeira actividade deste tipo que os alunos resolviam. Na primeira questão da tarefa não houve muitas dúvidas e os alunos suportaram-se imediatamente da máquina de calcular para fazer a representação gráfica dos dados. Não me questionaram muito e ultrapassaram sem grandes dificuldades alguns problemas de organização, no trabalho de grupo, sabendo também, de certo modo, o que 'se esperava' deles. Exploraram a tarefa rapidamente, pelo que o tempo previsto de 100 minutos foi suficiente.

Durante a exploração tarefa tive a preocupação de perceber quais as descobertas e dificuldades dos diversos grupos mas foram poucos os comentários que fiz, uma vez que os alunos trabalharam de forma autónoma e sem dificuldades. Aproveitei, no entanto, nos grupos mais avançados, para colocar questões para os alunos pensarem noutras hipóteses ou justificarem as que tinham. Fiquei também surpreendida com os raciocínios que eles fizeram, alguns dos quais eu não me tinham ocorrido.

No final da exploração os grupos tiveram oportunidade de apresentar as conclusões da investigação oralmente, e defender as suas posições. Também aqui houve uma alteração à sequência habitual das fases do trabalho investigativo. A discussão desta tarefa foi realizada antes da entrega do relatório, por uma questão de gestão do tempo e não incluiu a colocação de problemas que não tivessem sido previstos. Esta nova fase do trabalho proporcionou uma reflexão importante sobre a natureza da Matemática pois os alunos aperceberam-se de variados caminhos possíveis e verificaram que havia inúmeras possibilidades que não se lembraram, compreendendo melhor o tipo de trabalho desenvolvido.

Também nos relatórios os alunos mostraram uma melhor noção do que se pretende com as tarefas investigativas, como se percebe pela frase de uma aluna no final

da aula: 'Desta vez temos muitas explorações para apresentar. Acho que desta vez conseguimos melhorar o relatório'. Na verdade, os relatórios estão mais completos, com descrições das explorações realizadas mais detalhadas e em maior número e apresentam até, algumas tentativas de justificação do trabalho realizado.

A alteração na sequência entre a discussão e a elaboração do relatório não me pareceu ter sido prejudicial à escrita deste. Apenas um grupo incluiu no relatório algumas estratégias e conclusões que não tinham sido desenvolvidas pelos alunos durante a exploração da tarefa, mesmo assim assinalaram o facto.

Tarefa 4 – Quem vai para o mar...

Por solicitação dos alunos, não fiz introdução à tarefa. Após a leitura individual dos enunciados, eles começaram a trabalhar imediatamente e de forma autónoma. Cada elemento do grupo pensou em estratégias possíveis e partilhou-as com os restantes elementos, discutindo-as. A minha intervenção não foi muita, apenas tirei algumas dúvidas referentes, sobretudo, ao enunciado que, para alguns, estava menos explícito.

Foi possível constatar a utilização de uma nova estratégia, na fase da exploração da tarefa, e uma grande organização dentro do grupo, com funções atribuídas aos seus elementos. Começaram a exploração já com vista a responder às questões seguintes, em particular à última, onde se pretendia uma generalização. Quanto à divisão do trabalho dentro do grupo, parece acontecer de acordo com as questões colocadas, em que cada aluno fica responsável pela estruturação de estratégias de resolução para responder ao que é pedido na questão que lhe corresponde.

Apesar desta organização e divisão de funções, dentro dos grupos, para trabalharem mais rapidamente, em ambas as turmas foram necessárias três aulas de 50 minutos para terminarem a tarefa. Isto porque esta tarefa era muito rica em termos investigativos, permitindo a utilização de muitas e variadas estratégias, das quais os alunos se aperceberam, progressivamente, e fizeram questão de explorar. Mostraram, desta forma, ter uma melhor noção do que se pretende com este tipo de actividade.

A discussão foi realizada numa aula de 50 minutos, imediatamente a seguir ao fim da exploração, por restrições de tempo, e antes da entrega dos relatórios. Durante a discussão, todos os grupos participaram activamente, interpelando-se uns aos outros e explicando, com raciocínios bastante desenvolvidos e até contra exemplos, o porquê das suas dúvidas relativas à validade de certos resultados apresentados. Foi nesta fase que alguns grupos se deram conta de resultados/conjecturas incorrectas e porque é que

estavam incorrectas. Dada a grande variedade de estratégias e explorações por eles realizadas, não houve tempo para discutir todas as questões.

Os relatórios desta tarefa também revelam uma evolução significativa relativamente aos anteriores. Estão mais desenvolvidos, apresentam as várias estratégias utilizadas e testadas na fase de exploração, e tentam justificá-las. Alguns alunos utilizaram os conhecimentos que foram adquirindo na disciplina, nas unidades programáticas abordadas. Outros pensam que podem fazer as explorações sem ter que recorrer a esses conhecimentos, e apresentam resultados igualmente válidos. Com os relatórios e com a discussão apercebi-me de vários caminhos que os diversos grupos percorreram e os diferentes raciocínios e estratégias por eles utilizados.

Aulas expositivas e de resolução de exercícios

Nas aulas expositivas fiz a apresentação de conceitos e métodos matemáticos relativos aos conteúdos programáticos da disciplina. A exposição foi feita oralmente e formalizada através da escrita, no quadro, dando ênfase às deduções e demonstrações por serem processos de raciocínio que pretendo que os alunos desenvolvam. Frequentemente fui interpelada pelos alunos no sentido de explicar 'melhor' o que estava a ser exposto. De forma a tentar garantir o acompanhamento da aula por parte dos alunos, estes foram também solicitados a participar nas deduções e justificações dos métodos sempre que os conhecimentos já adquiridos o permitissem. Pretendia com estas aulas que os alunos adquirissem os conhecimentos teóricos necessários à resolução de problemas reais contextualizados, aplicando-os de forma correcta.

As aulas dedicadas à resolução de exercícios serviram para consolidar esses conceitos. Os exercícios foram resolvidos durante uma parte da aula, individualmente ou em interacção com o colega mais próximo e recorrendo ao uso da máquina de calcular. Ao circular pela sala, para observar o desenvolvimento do trabalho e esclarecer algumas dúvidas, pude verificar quando é que a maior parte dos alunos tinha terminado a resolução do conjunto de exercícios propostos no início da aula. Nesta fase, passou-se à apresentação e discussão dos resultados, no quadro, pelos alunos que se voluntariaram. Foram sugeridos outros exercícios para serem resolvidos em tempo extra-lectivo uma vez que os alunos consideraram insuficiente o número de aulas disponibilizado para esta actividade, afirmando precisar de mais exercícios para

consolidar as matérias. Penso que esta reacção terá a ver com a experiência académica anterior e pode ser explicado pela falta de hábitos de estudo.

A avaliação e classificação dos alunos

As actividades de aprendizagem que tiveram lugar na disciplina foram essencialmente de dois tipos: realização de tarefas de exploração/investigação e aulas de exposição de matéria e de resolução de exercícios. Para que houvesse coerência entre o trabalho pedagógico e a forma de avaliação dos alunos, a sua classificação baseou-se em diferentes instrumentos de avaliação, de forma a contemplar as diferentes vertentes de trabalho desenvolvido nas aulas.

A realização de tarefas de investigação é uma actividade matemática complexa e que pretende desenvolver no aluno aspectos relacionados com as atitudes, capacidades e conhecimentos. Deste modo, a avaliação destas actividades de investigação foi baseada na análise dos relatórios elaborados pelos alunos, em grupo. Na classificação destes documentos utilizei a tabela de descritores já referida anteriormente (anexo 7). A classificação atribuída aos relatórios foi quantitativa (escala de 0-20), igual para todos os elementos do grupo. Para cada aluno foi depois calculada a média das classificações obtidas nos quatro relatórios das tarefas realizadas, que teve um peso de 40% na respectiva classificação final.

A qualidade dos relatórios da primeira tarefa de alguns grupos não correspondia ao trabalho desenvolvido pelos seus elementos e que foi observado por mim, na aula. Como forma de motivação e para que não se verificasse o abandono ou desinteresse dos alunos, por este tipo de actividade, não atribuí classificações inferiores a 11 neste primeiro relatório. No entanto, observei a preocupação dos alunos em analisar os comentários, feitos por mim, na correcção dos relatórios, de forma a aumentar a qualidade dos mesmos. Verificou-se uma melhoria, em alguns grupos significativa, na qualidade dos relatórios. Este facto é corroborado pela evolução das classificações atribuídas aos relatórios, cuja média foi 12 valores para o primeiro e 14 para o último.

No final do semestre foi aplicado um teste escrito de avaliação, cujo principal objectivo foi analisar o desempenho global de cada aluno no domínio do conhecimento, relacionado com os conteúdos abordados ao longo do semestre nas aulas expositivas e de resolução de exercícios.

O teste foi realizado em duas horas e era composto por duas partes. A primeira parte, orientada para a avaliação de aquisição de conhecimentos, incidia sobre questões de natureza puramente matemática abrangendo toda a matéria leccionada. Pretendia com estas questões avaliar o uso de conceitos e métodos e as competências de cálculo na resolução de exercícios e problemas colocados, semelhantes aos realizados nas aulas práticas. A segunda parte, contemplou uma questão de exploração de uma situação, para a qual os alunos não tinham resposta imediata mas que estando relacionada com a matéria abordada podia ser desenvolvida através de diferentes estratégias e raciocínios. Pretendia com esta questão observar e recolher informação ao nível da compreensão do processo de investigação e do modo como os alunos mobilizam os conhecimentos matemáticos.

O teste foi individual e cada aluno teve a possibilidade de consultar os seus apontamentos e utilizar a máquina de calcular como meios auxiliares e facilitadores na realização do mesmo. A classificação do teste foi quantitativa (escala de 0-20) e contribuiu em 50% na classificação final atribuída aos alunos nesta disciplina. As classificações dos alunos, no teste, não foram muito elevadas, apresentando uma grande amplitude de valores ([6,17]) e uma média de 10, não se tendo verificado diferenças significativas, relativamente ao desempenho dos alunos, entre as duas partes do teste. Pelo facto dos alunos não serem os mesmos, não é possível comparar estes resultados com os que foram obtidos em anos anteriores, com uma metodologia essencialmente transmissiva. No entanto, a maioria dos alunos não obteve piores resultados (níveis de conhecimento) no teste deste ano, cuja estrutura era, em parte, comparável. Assim, não deixa de ser evidente, que o tipo de actividades desenvolvidas nas aulas constituem uma alternativa válida, também, para o desenvolvimento de aptidões no domínio do conhecimento.

A observação das aulas, realizada por mim e as apresentações orais constituíram também situações de avaliação, permitindo avaliar uma variedade de objectivos, incluindo as atitudes e valores, os processos de raciocínio e a capacidade de comunicação oral. A participação e empenho dos alunos foi classificada em termos de sim ou não e ponderou a classificação final do aluno em 10%.

Os resultados finais dos alunos, nesta disciplina, podem-se considerar bastante positivos. Contrariamente ao habitual, em que a percentagem de alunos reprovados se aproximava dos 25%, apenas dois alunos não atingiram a classificação final de dez valores e terão que se submeter a um exame final.

Balanço final

Com a realização desta experiência pretendi promover nos alunos o contacto com actividades de investigação e ao mesmo tempo trabalhar os conceitos matemáticos nelas envolvidos. As tarefas de investigação realizadas foram enquadradas na vivência diária dos alunos, facto que parece ter sido importante na sua motivação para este tipo de actividade.

Surgiram algumas dificuldades no trabalho investigativo em torno das primeiras tarefas, sobretudo devido à falta de experiência dos alunos. Inicialmente, solicitavam-me com frequência para procurarem saber o que deviam fazer e se o que já tinham feito estava bem, encarando o trabalho investigativo como mais uma actividade centrada na professora. A minha postura evasiva e interrogativa, devolvendo as questões e remetendo as decisões para as conjecturas formuladas pelo grupo, foi no sentido de desenvolver nos alunos uma atitude investigativa, em que eles próprios fossem os agentes da sua aprendizagem. Desta forma, a dependência em relação à professora e o tipo de apoio solicitado foi-se alterando à medida que se foram adaptando às actividades investigativas. Para este aumento da autonomia dos alunos terá contribuído não só a redução das dificuldades sentidas, mas também a percepção, por parte destes, que de uma forma geral não eram fornecidas respostas às questões por eles colocadas.

Ao longo do semestre, durante a realização das actividades investigativas foi visível uma progressiva organização dos elementos dos grupos, com divisão de tarefas. A atribuição de funções parece ser feita de acordo com as questões colocadas. Desta forma, o trabalho do grupo passou a ser considerado um somatório de contributos individuais, em que as ideias dos outros eram aceites com naturalidade e sem questionamentos, e não como um produto resultante de uma discussão sobre o que estão a fazer. Como consequência, em parte, desta situação, verificou-se também que a partir de determinado período de tempo e tendo encontrado uma resposta para cada uma das questões colocadas, os alunos não procuram avançar mais na exploração e dão como terminada a tarefa, apesar das inúmeras e variadas possibilidades de estratégias que caracterizam uma tarefa de investigação. Mais uma vez foi necessária a minha intervenção, como professora, no sentido de os incentivar a envolverem-se mais aprofundadamente nas investigações, contribuindo para a melhoria da sua capacidade de investigar, que passaram a valorizar tanto as respostas como os processos utilizados, a

justificar as suas explorações e a considerar várias hipóteses de resposta para cada questão.

A elaboração dos relatórios de investigação foi um aspecto do trabalho investigativo onde também foi visível a falta de experiência dos alunos. Uma dificuldade detectada está associada à expressão escrita das suas descobertas. Inicialmente valorizavam sobretudo os produtos relativamente aos processos, incluindo apenas uma enumeração das descobertas feitas, poucas explicações das mesmas e nenhuma justificações. Depois, a minha intervenção, principalmente através dos comentários feitos, foi determinante para a mudança das concepções dos alunos relativamente ao que deve ser incluído num relatório. A qualidade dos relatórios de investigação elaborados pelos alunos foi, por isso, melhorando com o decorrer do trabalho em torno das tarefas de investigação. Também fiquei com a percepção, de que embora tenham revelado alguma dificuldade de comunicação e organização do raciocínio, os alunos poderão evoluir e desenvolver estas capacidades com a continuação deste tipo de trabalho.

As aulas de discussão revelaram-se fundamentais para o trabalho investigativo que se pretendia desenvolver. Nelas os alunos não só apresentaram as suas conclusões, explicaram as suas ideias e estratégias seguidas mas sobretudo, procuraram justificações e discutiram aspectos pouco pensados anteriormente, devido, sobretudo, ao forte questionamento dos seus colegas. Nesta fase, procurei trazer à atenção da turma os aspectos mais destacados do trabalho desenvolvido e estimulei o confronto de opiniões entre os alunos. Com base nas ideias apresentadas pelos alunos nos relatórios, coloquei ainda algumas questões com que introduzi alguns conceitos e métodos, conseguindo assim abordar os conteúdos que pretendia desenvolver com a tarefa trabalhada. Os alunos compreenderam isso e acarinham a ideia pois, segundo eles, “percebemos melhor para que é que servem as matérias teóricas e conseguimos relacioná-las”.

No final da realização de cada tarefa era possível reconhecer alguma satisfação nos alunos por terem conseguido encontrar resultados válidos, embora seguindo caminhos diferentes. É interessante também notar que alguns grupos desenvolveram ideias e estratégias que eu não tinha pensado quando projectei e experimentei a tarefa. Penso também que estas actividades investigativas ajudaram os alunos a desenvolverem a sua capacidade de comunicar matematicamente e o poder de argumentação.

A gestão do tempo foi um dos factores que mais condicionou o desenvolvimento das actividades. Foi necessário ter em conta, na realização das tarefas, os diferentes

tempos que os vários grupos precisaram para chegarem a uma estratégia de resolução conveniente, o tempo necessário à apresentação e discussão dos resultados dos diferentes grupos e ainda conjugar com as restantes actividades lectivas. O número de tarefas realizadas pareceu-me apropriado bem como os conteúdos abordados por elas e a sua sequência. Desta forma, os alunos foram utilizando os conhecimentos que iam adquirindo e as competências desenvolvidas, nesta disciplina, na realização da tarefa seguinte.

Ao nível do comportamento dos alunos e das suas reacções a este tipo de actividades, não verifiquei diferenças significativas entre as duas turmas, nem entre os alunos, em particular os repetentes a quem dediquei especial atenção. A insegurança destes alunos nos seus conhecimentos e a sua distribuição por diferentes grupos pareceram-me ser factores determinantes para não se verificar o meu receio inicial de que trabalhassem nas tarefas como simples exercícios, aplicando directamente os conhecimentos adquiridos anteriormente ao nível dos conceitos e métodos.

A forma como os alunos reagiram e exploraram as tarefas surpreendeu-me pela positiva. De um modo geral, os alunos investiram e empenharam-se na realização das tarefas e conseguiram superar as minhas expectativas, conseguindo trabalhar de forma intuitiva com conceitos que lhes são desconhecidos.

Atendendo à pouca experiência, quer dos alunos, quer minha, penso que o trabalho realizado foi muito interessante e promissor. Do que verifiquei, parece-me que a experiência correu bastante bem, foi muito positiva e que os objectivos delineados na proposta pedagógica foram atingidos.

CAPÍTULO 6

Estudo Caso dos grupos A e B

Caso do Grupo A

Caracterização do Grupo

Os quatro alunos que constituíram o grupo A de observação, três do sexo masculino (António, Pedro e Reinaldo) e um do sexo feminino (Marta) tiveram, de modo geral, uma escolaridade bem sucedida, quer na Matemática, quer noutras disciplinas. Encontravam-se por isso, dentro da idade padrão para este nível de escolaridade. Os alunos tinham uma boa relação entre si e funcionavam bem, embora não fosse este o grupo que mais sobressaiu durante as aulas dedicadas à realização de tarefas investigativas. Nas aulas destinadas à exploração das tarefas, Marta foi a principal dinamizadora do trabalho e assumiu a liderança do grupo. Isto poderá ter a ver, não só com a sua personalidade (espontânea nas suas intervenções) mas também por ter sido a única que já tinha tido algum contacto com actividades de investigação na sala de aula, durante o ensino secundário.

Três dos alunos referiram gostar de Matemática, enquanto o quarto elemento a colocou em último lugar de preferência entre todas as disciplinas escolares. No entanto, todos concordam com a necessidade da sua aprendizagem devido à importância que vai ter nas suas profissões futuras. De um modo geral, os elementos do grupo reconhecem que não se dedicam muito à disciplina fora das aulas e que têm capacidades que poderiam desenvolver se trabalhassem mais. São considerados alunos médios pelos resultados escolares que apresentam.

Tarefa 1 – *Arte de Marinheiro*

Esta tarefa proporcionou a abordagem de conceitos e regras de aritmética intervalar. Como era a primeira vez que os alunos tinham contacto com este tipo de tarefas, a sua estrutura tinha elementos orientadores, assumindo assim uma natureza

mais estruturada. Ao analisarem a tarefa, os alunos contactaram com uma realidade que lhes era familiar, o que lhes permitiu confrontar as suas concepções sobre o assunto com os conceitos matemáticos adquiridos.

Iniciei a aula com a distribuição do enunciado escrito da tarefa e com uma pequena explicação do que consistia a tarefa e do que dela pretendia. Os alunos iniciaram o trabalho com uma leitura individual do enunciado e não demonstraram grandes dificuldades na exploração da tarefa.

A primeira questão não suscitou dúvidas entre os elementos do grupo e foi rapidamente resolvida pois limitava-se à realização de cálculos com operações já suas conhecidas.

A questão 2 apelava à utilização de conhecimentos sobre as propriedades dos números reais para identificação de regras para as operações elementares conhecidas (subtração, multiplicação e divisão), utilizando intervalos de números reais. A exploração de casos particulares e a elaboração e teste de conjecturas tornavam-se assim necessárias na procura das generalizações pretendidas.

Ao circular pela sala apercebi-me que as conjecturas deste grupo foram, em parte, indiciadas pelos conhecimentos matemáticos que tinham anteriormente pois a sua formulação não foi baseada em experimentação de casos nem na procura de regularidades. Nesta formulação usaram uma linguagem simbólica, o que os levou de imediato à generalização de resultados:

Para a divisão: limite máximo $\Rightarrow (x + \alpha) : (y - \beta)$

limite mínimo $\Rightarrow (y - \beta) : (x + \alpha)$

Para a multiplicação: [...]

Para a subtração: [...]

Assim, perante estas generalizações obtivemos um limite máximo de todas as operações e um limite mínimo de todas as operações. (Relatório)

Questionei-os sobre a forma como tinham chegado às conjecturas e incentivei-os a explorarem alguns casos e a verificarem a validade dessas conjecturas. O grupo iniciou então o seu trabalho, cuja principal dinamizadora foi a Marta, dividindo tarefas: "Vocês os dois vão fazendo para a divisão, e..." (Marta).

As explorações realizadas foram feitas utilizando apenas dois dos valores das bitolas dos cabos, dados na primeira questão do enunciado e sem qualquer tentativa de sistematização:

x	4+0,5	4-0,5	5+0,5	5-0,5
4+0,5	20,5	15,75	24,75	20,25
4-0,5	15,75	12,25	19,25	15,75
5+0,5	24,75	19,25	30,25	24,75
5-0,5	20,25	15,75	24,75	20,25

(Relatório)

A experimentação ficou assim reduzida a um número muito limitado de exemplos que os alunos consideraram suficiente para retirar conclusões e mostrar a validade das mesmas. O enunciado e o contexto da tarefa poderão também ter limitado a exploração aos valores disponibilizados e considerados realísticos para as bitolas dos cabos.

Nesta altura, o grupo chamou-me para dar a questão por terminada. Verifiquei que não tinham tido a preocupação de justificar as suas descobertas e chamei-lhes a atenção para esse facto, dizendo:

Profª: Vocês generalizaram. Verificaram de alguma forma se funciona sempre, funciona só às vezes...?

Marta: Nós até tivemos o cuidado de ver, por exemplo, se o resultado seria diferente. Se os dois números fossem maiores que 1 ou os dois menores que 1, o caso era o mesmo. Se um fosse maior que 1 e outro menor que 1 já o caso ia variar.

Profª: E vocês têm ideia porque é que é assim? Conseguem explicar porque é que é assim?

Marta: Não sei é como é que justificamos isto. Com os exemplos até é fácil, agora não justifica nada.

Na questão 3 verifiquei com agrado que reconheceram os conteúdos programáticos dados anteriormente e que mobilizaram esses conhecimentos para a resolver. Podemos verificar no excerto seguinte do relatório que, quando não conseguiram associar um erro ao π , realizaram os cálculos mantendo-o como constante em vez do seu valor aproximado. Mostraram assim terem compreendido os conceitos de valor aproximado, erro e majorante do erro, que foram bem utilizados.

Para encontrarmos o majorante substituímos os valores com o maior erro possível: $V = \frac{\pi(40,2)}{3} ((30,3)^2 + (20,4)^2) = 17878,95\pi$.

Para encontrarmos o minorante substituímos os valores de H, R e r pelo valor por defeito: $V = \frac{\pi(39,8)}{3} ((29,7)^2 + (19,6)^2) = 16798,91667\pi$.

$$\text{Majorante do erro} = \frac{|17878,95\pi - 16798,91667\pi|}{2} = 540,016665.$$

(Relatório)

Embora tenham tido o cuidado de fazer registos do que estavam a fazer, o relatório entregue pelo grupo não ilustra todas as descobertas e ideias discutidas pelos alunos, como os próprios reconhecem no seu relatório: “Fizemos mais tentativas que falharam e por isso não apresentamos”.

Na aula de discussão os elementos do grupo participaram activamente, reconhecendo quando regras e hipóteses formuladas por outros grupos não estavam correctas. Normalmente sabiam dizer porque é que estava errado e faziam-no através de um contra-exemplo ou mesmo utilizando os conceitos e propriedades dos números reais. A minha orientação promoveu, de certo modo, a sua justificação e, nalguns casos, até a demonstração, das hipóteses por eles formuladas, ao contrário dos relatórios onde estes processos não surgiram.

Esta primeira tarefa de investigação proporcionou uma experiência positiva para o grupo. Na sua opinião, ela foi importante porque estimulou-os e obrigou-os a fazer descobertas: “Este trabalho ajudou-nos a perceber como é que os matemáticos pensam e chegam às conclusões” (Relatório).

Tarefa 2 – *Águas Ameaçadas*

Nesta tarefa pretendia abordar as equações não lineares e verificar que estratégias os alunos utilizariam para responder às questões colocadas, uma vez que os métodos de resolução lhes eram desconhecidos. Foi proposto a construção de gráficos e sua interpretação para ajudar no desenvolvimento das questões seguintes e sugeri a procura de generalizações para os procedimentos efectuados de forma à dedução de um método de resolução de equações não lineares.

O trabalho do grupo iniciou-se com a leitura individual do enunciado, distribuído por mim no início da aula, sem qualquer comentário sobre o mesmo. Nesta tarefa surgiram algumas dificuldades iniciais, sobretudo na interpretação do enunciado. Apesar da questão 1 ser directa, precisaram de alguns esclarecimentos relativos aos

dados fornecidos e a sua relação com 'o que era para fazer', após o que iniciaram a exploração da tarefa com a representação gráfica da função, auxiliados pela máquina de calcular.

Na questão 2 foram solicitados a formular conjecturas sobre a variação do erro associado às possíveis soluções aproximadas. Desta vez sentiram a necessidade de experimentar casos para poderem formular conjecturas que respondessem ao pedido, embora considerando suficiente estudar dois exemplos:

E se estudarmos outros intervalos?

Consideremos 2 intervalos diferentes, sendo um maior que o outro e calculemos os erros para estes intervalos. (...)

Assim, quanto menor a amplitude do intervalo, menor o erro encontrado.

(Relatório)

Para determinar um procedimento que desse resposta à questão 3, experimentaram vários casos, desta vez sistematizados de acordo com a lógica estabelecida na conjectura formulada. Estas conjecturas surgem, no entanto, em forma de conclusões: "Assim, chegamos à conclusão que se o intervalo tiver mais casas decimais, com mais algarismos significativos, restringe-se mais o intervalo, logo o majorante do erro será cada vez menor, aproximando-se cada vez mais do valor verdadeiro" (Relatório).

Quando questionados sobre a possibilidade de generalizar o procedimento proposto anteriormente, recorreram a um exemplo que à partida iria dar problemas e que não verificava o pretendido. Isto levou-os a um processo de especialização e a imporem condições para que essa generalização pudesse ser feita. A justificação, neste caso, surgiu através de um gráfico e por palavras, no sentido de mostrar o porquê das restrições. Nesta tarefa também não tentaram demonstrar as suas "conclusões".

Embora o relatório só apresente um caso de especialização, o grupo pensou e discutiu outros casos que considerou não serem importantes, talvez por não acrescentar nada de novo ao que já tinham. Desta forma, o relatório mostrou o trabalho desenvolvido pelos alunos, mas de uma forma pouco incompleta, uma vez que não encontraram critérios gerais para utilização da estratégia escolhida.

Eu tive pouca intervenção e não interpelei muito os alunos. Só contactei com eles quando solicitada na questão 4 para esclarecer as dúvidas que o grupo tinha sobre o significado da palavra "generalizar". Neste caso, a questão colocada foi: "Temos que

arranjar um procedimento para fazer a diminuição do intervalo e explicá-lo, ou arranjar uma fórmula?" (Relatório).

Na discussão da tarefa, o grupo contribuiu com as suas estratégias, por sinal diferente de todas as outras. Nesta nova fase do trabalho, os alunos aperceberam-se de inúmeras possibilidades de que não se tinham lembrado e compreenderam melhor o tipo de trabalho desenvolvido.

Os alunos trabalharam bem em grupo. Todos os elementos colaboraram no trabalho dando as suas opiniões e esclarecendo as dúvidas uns dos outros, como se pode observar na discussão do conceito de equação não linear:

Reinaldo: O que é uma equação não linear?

Pedro: Uma equação não linear é tipo uma parábola. Uma equação linear é uma recta. Uma equação não linear pode ser uma quadrática ou uma equação cúbica, por exemplo.

Marta: É que não é uma linha.

Esta tarefa foi mais do agrado dos alunos:

O trabalho desenvolvido em grupo foi mais proveitoso, na medida em que o grupo já tinha a experiência da resolução da tarefa anterior, o que nos serviu de base para nos organizarmos de melhor maneira. (António)

Este trabalho foi mais fácil de concretizar, após percebermos o que nos era pedido. Durante as tentativas de resolução das questões, ocorriam diversas sugestões e modos de resolver, o que, até pode ser proveitoso devido à panóplia de caminhos a seguir. (Pedro)

Tarefa 3 – Ainda os lagos...

Esta tarefa consiste em analisar o comportamento de um conjunto de dados, oriundos de uma experiência real, com significado para os alunos, e seleccionar, entre os modelos matemáticos por eles conhecidos, o que melhor descreve esse comportamento. Em especial, a tarefa permite abordar o ajustamento de curvas através do método dos mínimos quadrados.

Fornei-lhes o enunciado escrito da tarefa, sem dar qualquer explicação sobre ele. Esta tarefa caracterizou-se por ter questões um pouco mais abertas que as anteriores. Este facto, contribuiu para a necessidade dos alunos definirem critérios e

tomarem decisões e permitiu uma grande variedade de explorações e de estratégias no seu desenvolvimento.

Os alunos iniciaram o trabalho recorrendo de imediato à máquina de calcular para visualizar os dados fornecidos e os auxiliar na exploração da tarefa, experimentando vários casos, como referiram no seu relatório:

Para tentar descobrir valores aproximados para completar as falhas de registo, precisamos de descobrir uma função que traduza aproximadamente o crescimento das bactérias. Lembramo-nos que a máquina gráfica possui uma característica que nos pode ajudar. Para descobrir qual seria o gráfico que melhor representaria a evolução da população de bactérias, experimentámos vários gráficos. (Relatório)

A formulação e teste de conjecturas foram assim realizados de uma forma bastante implícita, através da visualização gráfica. Um primeiro exemplo deste processo está descrito pelo grupo da seguinte forma no relatório:

Surgiu-nos de imediato a ideia de fazer pelo método da interpolação mas viemos a constatar que esse método não poderia ser utilizado pois o crescimento da população não é linear, ou seja, o gráfico que traduz esse crescimento não é dado através de uma recta. (Relatório)

É de salientar que nesta altura a proporcionalidade directa (regra de três simples) era a única forma de resolução analítica por eles conhecida e que foi correctamente rejeitada. A utilização da máquina de calcular tornou-se assim imprescindível pois não teriam outra maneira de encontrar os parâmetros dos modelos testados. Além disso, revelou-se uma ferramenta facilitadora da exploração da tarefa, dado que permitiu elaborar e visualizar os gráficos, comparar as respectivas representações e formular conjecturas e argumentos sobre elas. De entre as suas potencialidades o grupo destaca o facto de ver surgir rápida e simultaneamente os gráficos das funções, o que permite compará-los e analisar as mudanças ocorridas entre eles.

A exploração não foi sistematizada, pois a principal preocupação dos alunos esteve centrada na descoberta do maior número possível de 'casos' que podiam obter na máquina e no seu registo. Cada elemento do grupo experimentou modelos de funções diferentes e apresentou-os aos restantes que os aceitaram sem questionamento, mostrando não terem opinião crítica sobre a utilização dos diversos modelos. Enquanto

alguns elementos do grupo consideraram a visualização do gráfico suficiente para justificar a escolha da função, outros pensaram que era necessário uma justificação diferente. Esta discussão foi muito frutífera pois resultou numa estratégia para a escolha do melhor modelo baseada na minimização das distâncias entre os valores experimentais e os do modelo seleccionado. Fiquei agradavelmente surpreendida com o facto de eles serem capazes de, intuitivamente, utilizarem conceitos ainda não trabalhados. Aperceberam-se que os ajustamentos estão associados a erros e que o objectivo é minimizá-los, embora a sua concretização não tenha sido a mais adequada (utilizaram a média em vez da soma deles). A utilização do módulo para medir as diferenças entre os valores verdadeiros e estimados indicia também uma aprendizagem significativa do conceito de erro. Apesar disto, e porque também não era pedido explicitamente no enunciado da tarefa, não fizeram generalizações. Este aspecto foi depois trabalhado e aprofundado na aula de discussão da tarefa, onde o grupo participou activamente.

Nesta tarefa houve uma alteração à sequência habitual do trabalho investigativo com a discussão a ser realizada antes da entrega do relatório. Esta alteração não pareceu influenciar a escrita do relatório que apresentava apenas a descrição das estratégias e conclusões trabalhadas pelo grupo, na aula. Mais uma vez, não aparece qualquer tentativa de argumentação ou demonstração dos resultados obtidos. Apesar do relatório estar mais completo que os anteriores, não apresentou um relato fidedigno do trabalho realizado. O grupo fez uma exploração inicial com os dados, tentando encontrar regularidades, antes de optar pela máquina de calcular:

Marta: Olhem, eu fazia por meio da interpolação

António: Não é melhor fazer por tentativas?

Marta: Isto são todos múltiplos de 5. Se calhar podemos arranjar múltiplos de 5...

António: Como é que nós fazemos o método de Lagrange?

Pedro: Como é que é possível fazer um modelo matemático só com estes pontos?

Como não conseguiram concretizar essas ideias e consequentemente continuar o desenvolvimento da tarefa, desistiram dessa estratégia e não a referiram no relatório, apesar de ter sido apresentada na discussão.

Tarefa 4 – *Quem vai para o mar...*

Tal como as anteriores, também esta tarefa tinha um contexto real, mas a sua reduzida estruturação possibilitou o desenvolvimento de uma grande variedade de percursos e estratégias. A tarefa proporcionava a abordagem da temática da integração numérica mas no seu enunciado nada indiciava a necessidade de utilização de integrais, nem eram fornecidas quaisquer funções que pudessem vir a ser integradas. Constituiu, assim, numa situação desconhecida dos alunos, em que era necessário a exploração de várias situações de forma a poderem generalizar procedimentos e propor métodos de integração alternativos e apropriados a essas situações.

Após a leitura do enunciado da tarefa, distribuído por mim no início da aula, cada elemento do grupo pensou em estratégias possíveis e partilhou-as com os restantes elementos, discutindo-as. Iniciar a exploração através da representação gráfica dos dados na máquina de calcular foi uma ideia consensual. O objectivo do grupo, na questão 1, foi fazer explorações de forma a encontrar estratégias que permitissem responder às questões seguintes, em particular à última onde se pedia a generalização de procedimentos.

Foi possível verificar uma grande organização dentro do grupo, com funções atribuídas aos seus elementos. Alguns elementos do grupo tentaram fazer as suas explorações utilizando conhecimentos anteriores relativos ao cálculo de áreas e ao conceito de integral. Estas explorações, apesar de válidas, ficaram um pouco pobres por não terem conseguido argumentar a favor desta estratégia.

Outra estratégia proposta, dominante ao longo de todo o trabalho, foi a utilização de “ferramentas” abordadas em unidades programáticas anteriores, como a interpolação polinomial e o ajuste de curvas. O grupo referiu a sua utilização da seguinte forma: “Para a obtenção de uma função que se ajuste aos pontos existentes, utilizou-se o método dos mínimos quadrados” (Relatório). O facto de as reconhecerem e serem capazes de as utilizar, independentemente de trabalharem noutro contexto, reforça as aprendizagens realizadas.

A calculadora gráfica voltou a ser fundamental como ferramenta de auxílio à exploração. Mas, ao contrário da tarefa anterior em que utilizaram todas as funções disponíveis na máquina de calcular para ajustar um conjunto de pontos, nesta tarefa houve uma selecção crítica das funções possíveis de utilizar. A selecção não foi feita formalmente através de justificações mas com base numa visualização gráfica, de que é

exemplo a afirmação seguinte: “Pela disposição dos pontos, exclui-se logo à partida a função exponencial, logarítmica, potência e rectas” (Relatório).

Foi também notória uma evolução na capacidade de questionamento, uma vez que esta ausência de justificação levou à seguinte discussão e desacordo entre dois elementos do grupo:

António: Ou seja, para aqui tu tens que fazer as curvas todas, ver qual é a melhor.

Marta: A melhor é a função cúbica!

António: Como é que...

Marta: Porque se vê pelo desenho.

António: Não é porque é. Tu tens que pôr no relatório, não é porque sim.

Marta: Claro que é.

António: Não.

Marta: Tu olhas para a função e assemelha-se à forma de uma cúbica. Desenhás a cúbica e os pontos estão lá.

António: Mas no relatório tens que explicar. Isto tem que ter alguma lógica.

Marta: Qual é a lógica que tens num gráfico e parece-te uma cúbica?

António: Parece-te!

Marta: Portanto, tu tentas uma cúbica.

António: Metes isso no relatório e a Professora...

Marta: Isto não tem nada a explicar, é mesmo assim!

Apesar deste confronto, a justificação das conjecturas formuladas é feita de uma forma pouco clara: “à medida que se subia de grau a função ajustada era melhor, sendo a ideal para o polinómio de nono grau”. Sem justificarem o que significa ser ‘ideal’, continuam: “Como na função cúbica, o ajustamento aos pontos era bastante aceitável e na medida em que posteriormente para a execução de cálculos, convém facilitarem-se as contas, a nossa escolha recaiu sobre esta função”.

Durante a exploração da tarefa, a minha intervenção foi pequena uma vez que os alunos mostraram uma grande autonomia. Com a divisão de tarefas e a grande variedade de estratégias que progressivamente foram surgindo, o trabalho do grupo passou a ser um somatório de contributos individuais, sem sistematização e em que as ideias dos outros eram aceites com naturalidade, sem questionamento. Isto fez com que se

perdessem um pouco, altura em que fui chamada para ajudar a decidir qual o melhor caminho que deviam seguir, pois o resto da tarefa baseava-se nestes resultados/métodos. Sugerir que essa decisão fosse discutida pelo grupo, incentivando-os a compararem as estratégias e a verificarem e a aprofundarem as potencialidades de cada uma. Esta proposta propiciou verdadeiras interações entre os alunos quando cada um experimentou diferentes estratégias e confrontou os resultados.

Apesar disso, a verificação e generalização das conjecturas não foi relevante, como já tinha acontecido na tarefa anterior. Confrontados com a necessidade de generalizar procedimentos, na questão final, escolheram a estratégia que dominaram melhor e tentaram utilizar simbologia matemática para deduzir uma fórmula. Apesar de válida, não é, por si só aplicável uma vez que depende de uma função que o grupo não definiu. Para isto terá contribuído a falta de organização/sistematização das explorações realizadas. E se a justificação já foi um processo que levantou algumas dificuldades, a demonstração nem sequer foi referida.

O relatório apresenta-se muito confuso devido às muitas e variadas explorações realizadas pelos alunos mas sem qualquer sistematização nem justificação. As conjecturas formuladas e as 'conclusões' a que chegaram foram baseadas em exemplos e casos particulares. Não especializaram este processo.

Na discussão do trabalho, os alunos aperceberam-se de variados caminhos possíveis, verificaram que havia inúmeras possibilidades que não se tinham lembrado e compreenderam melhor o tipo de trabalho desenvolvido. Durante esta discussão, os alunos interpelaram-se uns aos outros e explicaram, com raciocínios bastante desenvolvidos (e até com contra-exemplos), o porquê das suas dúvidas relativas à validade de certos resultados apresentados. Foi nesta fase que surgiram as justificações e que se deram conta de resultados/conjecturas incorrectas e porque é que estavam incorrectas. Dada a grande variedade de estratégias e explorações realizadas pelos alunos, não houve tempo para discutir todas as questões.

Reflexões finais

Após a análise do trabalho realizado pelo grupo, nas diversas tarefas, destaco alguns aspectos com os quais pretendo responder às questões do estudo. Assim, os dados obtidos mostram que, em geral, os alunos deste grupo se envolveram neste tipo de actividade com entusiasmo e interesse e reconhecem-lhe potencialidades para a

aprendizagem da Análise Numérica. Apesar disso, o seu desempenho teve características diferentes nas várias tarefas realizadas e parece ter sido condicionado por diversos factores.

Processos

Dos processos matemáticos utilizados por estes alunos durante o seu trabalho investigativo destaco: o registo e organização dos dados, especialização, procura de regularidades, formulação e teste de conjecturas, generalização, justificação e prova.

Na tarefa 1, os alunos discutiram entre si as propriedades dos números reais e tentaram encontrar as regras operatórias pedidas no enunciado da tarefa sem experimentação prévia. No entanto, nas restantes investigações realizadas, o grupo já seleccionou uma estratégia de investigação dedutiva, com a análise de vários casos. Este processo de especialização foi realizado em algumas das tarefas propostas e seguiu, umas vezes, uma lógica aleatória e outras vezes uma lógica mais sistemática. Na tarefa 2, por exemplo, utilizaram a seguinte sistematização para chegarem à conclusão que “se o intervalo tiver mais casas decimais, restringe-se mais o intervalo, logo o majorante do erro será cada vez menor”:

O intervalo escolhido no início $[0,36;0,37]$ deu um erro de 0,004738.

Se aumentarmos o intervalo para $[0,3;0,4]$ o erro é de 0,05755.

Se diminuirmos o intervalo para $[0,365;0,366]$ o erro é de 0,0001972 [...].

(Relatório)

As experiências realizadas, de uma forma geral, conduziram à formulação de conjecturas, um processo que esteve presente em qualquer uma das tarefas apresentadas. O processo de especialização foi também, em alguns casos, utilizado para testar essas mesmas conjecturas. É disso exemplo a 1ª tarefa, quando o grupo verificou se os exemplos testados confirmavam as hipóteses:

Como na demonstração,

limite máximo = $(x + \alpha).(x + \alpha) = (5 + 0,5).(5 + 0,5) = 30,25$.

limite mínimo = $(y - \beta).(y - \beta) = (4 - 0,5).(4 - 0,5) = 12,25$. (Relatório)

A ausência de sistematização e o carácter pouco organizado da análise de casos dificultou a generalização de procedimentos que se mostrou muitas vezes incompleta ou mesmo ausente. É disso exemplo a exploração realizada pelo grupo na tarefa 4, que não

originou qualquer generalização e foi abandonada pelo grupo como uma possível estratégia para o cálculo integral:

Utilizando os pontos: (0,230) e (2,320)	$\int_0^2 dx \int_{230}^{320} dy = 550 \text{ litros}$
Utilizando os pontos: (0,230) e (1,300)	$\int_0^1 dx \int_{230}^{300} dy = 265 \text{ litros}$
Utilizando os pontos: (8,160) e (9,120)	$\int_8^9 dx \int_{120}^{160} dy = 140 \text{ litros}$
Utilizando os pontos: (1,300) e (9,120)	$\int_1^9 dx \int_{120}^{300} dy = 168 \text{ litros}$
Utilizando agora três pontos [...]	(Relatório)

Os alunos mostraram falta de hábito em explicar e justificar o seu trabalho, o que, aliado à falta de alguns conhecimentos, provocou uma certa incapacidade de usar estes processos. O processo de justificação teve uma presença muito reduzida nas investigações realizadas por este grupo. Ao longo do trabalho de investigação não procuraram explicar o porquê das suas descobertas e não fizeram espontaneamente tentativas para justificar e provar as suas conjecturas, uma vez que não sentiam necessidade de o fazer: “Há medida que vamos fazendo, olhamos, é tão simples, se para a gente é imediato, achamos que não é preciso explicar e às vezes é necessário” (António). Na maior parte das vezes, as justificações que fizeram foram consequência de desafios colocados por mim nas aulas de discussão. Nesta altura os alunos fizeram um esforço por corresponder da melhor maneira.

Se o processo de justificação envolveu dificuldades, a demonstração teve ainda uma presença mais apagada no trabalho deste grupo, embora se deva reconhecer que ela, na maioria dos casos, não era acessível aos alunos. Para eles, a demonstração parece passar necessariamente pela utilização de linguagem simbólica. Por exemplo, na tarefa 1, formularam as conjecturas usando símbolos matemáticos, o que consideravam como sendo uma demonstração. Usaram algumas vezes a palavra ‘demonstrar’ com o significado de descrever o que acontece com casos particulares. Por exemplo, escreveram: “Para dar exemplos da nossa demonstração, atribuímos números ao x e y e também ao α e β ” (Relatório). Questionados sobre este processo, respondem:

Profª: Como provam/demonstram?

António: Exemplos é a maneira mais fácil...

Marta: Nós costumamos-nos dividir. Eu e o António costumamos fazer mais a nível de exemplos e o Pedro e o Reinaldo mais a nível de... usando o x e o y , é Matemática abstracta.

Aprendizagem da Análise Numérica

Como referido na proposta pedagógica, pretendia com este trabalho desenvolver metodologias e acções para promover a aprendizagem de uma forma eficiente. Importa pois reflectir sobre este aspecto e verificar se os alunos desenvolveram a compreensão de alguns tópicos de Análise Numérica abordados no decorrer do semestre.

Os objectivos das tarefas descritas no quadro 1, estão relacionados com os conteúdos programáticos e objectivos de aprendizagem definidos para esta disciplina. A análise de erros é um tema transversal a todo o programa. A compreensão dos conceitos de valor aproximado e de erro torna-se assim fundamental para abordar outros conteúdos. Estes conceitos parecem-me terem sido compreendidos pelos alunos uma vez que os utilizaram correctamente em todas as tarefas. Exemplos disso são os excertos dos relatórios da tarefa 1, já apresentado, e da tarefa 2 seguinte:

Posteriormente calcularam-se os erros para cada extremo do intervalo, com quatro algarismos relevantes:

$$E1 = \left| \frac{1780000 - 1677560}{1780000} \right| = 0.05755$$

E2 = [...]

(Relatório)

Na tarefa 2, foi ainda possível verificar que os alunos desenvolveram aprendizagens relativas ao conceito de método iterativo e à sua utilização para a resolução de equações não lineares. Questões como a convergência destes métodos e as condições necessárias para a sua aplicabilidade foram também preocupações que o grupo destacou no seu trabalho:

Neste trabalho concluímos que não somos capazes de encontrar o valor exacto da taxa de natalidade da população. Contudo, sabemos agora uma forma de nos aproximarmos do valor exacto, através de aproximações sucessivas. Concluímos também que este método não poderá ser generalizado se não se fizerem restrições, como por exemplo, a equação ser injectiva. (Relatório)

Outro t pico abordado nesta disciplina, onde as aprendizagens foram visíveis, diz respeito ao ajustamento de curvas pelo método dos mínimos quadrados. Na tarefa 3, os alunos utilizaram o módulo das diferenças entre os valores experimentais dados e os valores obtidos com os diferentes modelos matemáticos que exploraram, como erros, para seleccionar o melhor ajustamento. É precisamente este o conceito que está na base da construção do método dos mínimos quadrados.

Usando uma função quadrática $Y = aX^2 + bX + c$ em que $a = 0,8$, $b = 42,8$ e $c = 6,0$, obtemos os seguintes valores:

T (horas)	2	3	5	8
P ($\times 10^5$)	94,8	141,6	240,0	399,6

Comparando estes valores com os que nos são dados no enunciado, e calculando os vários erros existentes entre uns valores e outros

Pv-Pm	90-94,8	150-141,6	235-240,0	400-399,6
Erro módulo	4,8	8,4	5	0,4

(Relatório)

A rejeição da utilização de um modelo linear, por análise gráfica do comportamento dos dados disponibilizados, já referida na descrição da tarefa 3, indica também que os alunos desenvolveram algum conhecimento a nível de gráficos de funções.

Embora a interpolação polinomial tenha sido um conteúdo programático apresentado aos alunos em aulas expositivas e de resolução de exercícios, verifiquei que os alunos foram capazes de mobilizar os conhecimentos e os processos adquiridos, para os aplicar na realização de uma tarefa investigativa onde se apresentava uma nova situação. Por exemplo, quando na realização da tarefa 4 foi necessário substituir um conjunto de pontos dados por uma função que os representasse, os alunos utilizaram tanto os conhecimentos de interpolação como os de ajustamento de curvas e apresentam funções obtidas pelos dois métodos:

Para a resolução deste problema consideremos dois métodos já nossos conhecidos.

Utilizando uma função cúbica obtida pelo método dos mínimos quadrados [...]

Utilizámos também o método interpolador de Newton com diferenças progressivas. Este método é possível uma vez que os 'pares' estão igualmente espaçados e por ordem crescente. (Relatório)

Dado o exposto, parece-me que apesar de não ser visível uma grande evolução no desempenho do grupo ao nível dos processos matemáticos por eles utilizados ao longo do semestre, em particular a justificação e a demonstração, os dados mostram que se verificaram aprendizagens significativas dos conteúdos programáticos da Análise Numérica.

Factores que influenciaram os processos e as aprendizagens

Os processos descritos não estiveram igualmente presentes na elaboração das tarefas propostas e o seu uso foi influenciado por diversos factores, dos quais destaco a natureza das propostas de trabalho, o seu grau de estruturação, o trabalho de grupo e o uso de máquina de calcular.

O enunciado da tarefa influenciou, de certa forma, a selecção de estratégias de investigação adaptada pelo grupo pois continha indicações que podiam constituir um ponto de partida para a exploração e que, deste modo, induziam os alunos a seguirem uma determinada linha de abordagem. Das tarefas propostas, a última foi a que desencadeou o uso de um menor número de processos matemáticos, possivelmente pelo facto das questões enunciadas terem uma natureza menos estruturada. O contexto da tarefa e o facto das propostas abordarem situações da realidade resultou em efeitos contrários. Por um lado, foi um factor referido pelos alunos como positivo e do seu agrado: "Ajuda a perceber para que é que a Matemática serve. O ano passado havia vezes que eu saía da sala e pensava mas para que é que isto serve?" (Marta). Por outro, pareceu-me que pode condicionar o trabalho, como foi o caso da tarefa 1, em que a exploração ficou limitada aos números positivos. Os alunos explicaram: "Na demonstração não admitimos valores nulos ou negativos porque, como estamos a trabalhar com bitolas, não pode haver diâmetros com valores negativos" (Relatório).

Os alunos atribuíram à máquina de calcular um papel preponderante na realização das suas investigações, destacando as suas vantagens ao nível da rapidez da exploração das situações e da verificação das conjecturas formuladas. A sua utilização favoreceu a construção e comparação de diversos gráficos e consequentemente, influenciou o aparecimento de várias conjecturas e a sua verificação, num espaço de tempo relativamente limitado, mais visível na tarefa 3.

A minha intervenção junto do grupo foi caracterizada por alguma discrição, no sentido de procurar não retirar o carácter de investigação à tarefa nem minimizar a atitude investigativa dos alunos. Assim, as sugestões que propunha iam mais no sentido de os questionar, obrigando-os a pensar mais profundamente, e de os ajudar a ultrapassar alguns impasses que surgiram, sobretudo nas primeiras tarefas. Tentei, por diversas vezes, desafiar os alunos a uma maior exploração e a justificar diversas conjecturas, sobretudo nas aulas de discussão.

As aulas de discussão das tarefas foram momentos de trabalho enriquecedores. Por um lado, permitiram que os alunos fizessem novas descobertas e que procurassem justificações, por outro, proporcionaram algum confronto de opiniões entre os eles, levando-os a interagir e a aprender uns com os outros. Relativamente a estas aulas, em que o grupo procurou dar a sua contribuição, os alunos referem-nas, numa entrevista de grupo, como “úteis” e “interessantes” pois confrontaram-se com as explorações feitas pelos diferentes grupos, favorecendo a análise das suas ideias e mobilizando e desenvolvendo o seu conhecimento matemático:

Prof^a: O que pensam das aulas de discussão das tarefas?

Marta: Vale a pena porque nós ouvimos as ideias dos outros.

Prof^a: Aprendem alguma coisa com as ideias dos outros?

António: Novas maneiras de resolver o exercício.

Pedro: Podíamos ter resolvido desta maneira ou da outra maneira, não pensámos nisso e pode ser mais fácil ou mais difícil.

Outro factor que me pareceu favorecer a aprendizagem da Análise Numérica foi a sequência dos conteúdos programáticos abordados nas tarefas. Na verdade, os alunos foram utilizando os conhecimentos que iam adquirindo nas tarefas anteriores, reforçando, deste modo, as suas aprendizagens. Esta ideia é reforçada pelos alunos, nos relatórios:

Estas tarefas têm um objectivo interessante, pois permite-nos pôr em prática os conhecimentos matemáticos que vamos adquirindo.

É muito importante participar nestes trabalhos porque aprende-se muitas coisas.

Estas tarefas permitem-nos adquirir novos conhecimentos e fortalecer os adquiridos nas aulas. (Relatórios)

A influência que o trabalho de grupo teve neste tipo de actividade parece ser grande. De um modo geral afirmam gostar de trabalhar em grupo porque reconhecem que ao longo desta investigação todos contribuíram com algumas ideias que ajudaram a avançar no trabalho. A preferência pelo trabalho de grupo é justificada pelo aparecimento de várias opiniões favoráveis:

Cada um tem uma ideia mas todos temos uma ideia melhor ainda.
(Pedro)

É sempre agradável sermos colocados perante um desafio e ultrapassá-lo em grupo. (António)

Dificuldades

As principais dificuldades do grupo foram sentidas nas primeiras tarefas de investigação e prendem-se com a interpretação do enunciado (saber o que é para fazer), a gestão do tempo e a organização dos alunos enquanto grupo. Os alunos referem-se às dificuldades sentidas desta forma:

No início foi o tempo. Na primeira tarefa, talvez por ser a primeira, nós tivemos mais dificuldades. Na última nós resolvemos no tempo. Tem a ver com a nossa organização, de... Se nós conseguimos olhar para o exercício e ver uma maneira de resolver. (Marta)

Na primeira tarefa o enunciado não era muito explícito para nós e tivemos alguma dificuldade em perceber o que era pedido. E também em organizarmo-nos como grupo. (Pedro)

Mas eu acho também, como era a primeira tarefa... Depois já não.
(Reinaldo)

Foram ainda identificadas dificuldades associadas ao registo escrito das suas descobertas. Os alunos evidenciaram dificuldade em iniciar a elaboração do relatório da primeira tarefa de investigação, apesar das indicações e sugestões que lhes disponibilizei em forma de guião. Esta dificuldade é natural, uma vez que não tinham qualquer experiência anterior de realização de relatórios, sobretudo em disciplinas de Matemática. Os relatórios escritos de investigação elaborados pelo grupo foram evoluindo ao longo do semestre, passando a incluir o trabalho efectivamente realizado na aula de investigação, tendo ajudado os alunos a organizar e desenvolver algumas

ideias. No entanto, apesar da preocupação no uso de uma linguagem mais cuidada, evidenciam sempre uma grande dificuldade na expressão escrita.

Caso do Grupo B

Caracterização do Grupo

O grupo B era constituído, inicialmente, por quatro alunos, todos do sexo masculino (Carlos, Miguel, Zé e Jordão). Já após a realização da 2ª tarefa, o Jordão mudou de curso e, conseqüentemente, de turma, ficando o grupo de estudo a contar com apenas 3 elementos. Ao contrário do que aconteceu com o grupo A anteriormente analisado, este grupo destacou-se em todas as fases das aulas dedicadas à realização de tarefas investigativas, quer pelo empenho e entusiasmo demonstrados na exploração das tarefas, quer pela participação activa nas discussões em grande grupo, quer ainda pelo cuidado e correcção colocados na elaboração dos relatórios.

Nas aulas destinadas à exploração das tarefas, não verifiquei que algum elemento tivesse assumido a liderança do grupo. Todos foram muito participativos, dinâmicos e enquanto grupo trabalharam sempre bem, existindo uma boa relação e uma grande interacção entre os seus elementos.

Apesar de um dos alunos ser repetente, os seus percursos escolares foram bem sucedidos, quer na Matemática, quer noutras disciplinas e podem considerar-se alunos acima da média com gosto pela Matemática. Todos concordam também com a necessidade da aprendizagem da Matemática devido à importância que vai ter nas suas profissões futuras. Refira-se ainda que o Carlos já tinha frequentado o ensino superior.

Tarefa 1 – Arte de Marinheiro

A distribuição do enunciado escrito da tarefa foi acompanhada por uma pequena explicação sobre a mesma e do que se pretendia. Após uma leitura individual do enunciado, os alunos iniciaram o trabalho dialogando entre si sobre o caminho a seguir. Nesta tarefa, de natureza exploratória, foi apresentada uma situação real, bastante conhecida pelos alunos, permitindo-lhes confrontar as suas concepções sobre o assunto com conhecimentos matemáticos anteriores.

A primeira questão não suscitou dúvidas entre os alunos e foi rapidamente resolvida, como afirmam no seu relatório: “Nesta questão, a decisão surgiu praticamente de imediato com o consenso unânime por parte de todos os elementos do grupo”.

A questão 2 apelava à exploração de casos particulares de operações elementares conhecidas, utilizando intervalos de números reais, com o objectivo de identificar as regras gerais pretendidas. Demoraram algum tempo a tentar que fizesse sentido o que seria subtrair cabos e dividir cabos. Só depois de matematizarem a situação, isto é, de se abstrairem do contexto, é que começaram a trabalhar.

As primeiras conjecturas formuladas por este grupo surgiram através da experimentação de alguns casos e na procura de regularidades entre eles: “Consideraram-se então vários exemplos, formulando como primeira hipótese operar as bitolas e os erros independentemente uns dos outros, como abaixo se mostra: [...]” (Relatório).

Esta experimentação não ficou limitada a exemplos considerando os valores disponibilizados no enunciado e, não tendo sido muito sistemática, tentou abranger todas as propostas apresentadas pelos diversos elementos do grupo:

Espera aí! Agora estamos a colocar várias hipóteses em cima da mesa, e depois logo se vê. (Carlos)

Eu tenho uma hipótese. A minha sugestão era ver se isto é viável. (Miguel)

Porque é que tu não associas bitolas iguais? Também podemos fazer isso. (Zé)

A verificação das conjecturas foi também realizada através do teste de vários casos. Estes testes ajudaram os alunos a refinar as suas conjecturas:

No entanto, verificou-se que esta primeira impressão apenas teve sucesso na subtracção. [...] Uma vez falhada a primeira hipótese nos restantes casos, formularam-se novas hipóteses, nas quais se relacionaram os valores das bitolas com os valores dos erros. (Relatório)

Seguem-se os exemplos adoptados para ambas as hipóteses: [...]. (Relatório)

Apesar de não terem conseguido demonstrar as suas hipóteses, verifiquei que a preocupação em justificar as suas descobertas esteve presente durante a realização da tarefa:

Há uma coisa que eu me lembro que é que também é importante comprovar alguns resultados. Há várias maneiras de provar uma coisa. Podes ir pela negação ou também podes ir pelo absurdo. (Carlos)

O contexto da tarefa não pareceu ter limitado a exploração aos valores positivos, considerados realísticos para as bitolas dos cabos, como aconteceu noutros grupos. Embora a exploração tenha inicialmente sido feita só com valores positivos, foi preocupação do grupo sugerir formas de ultrapassar esta limitação:

Ao terminar o trabalho, reparou-se que apenas se haviam efectuado cálculos com números positivos, pois o exemplo dos cabos não contempla números negativos por ser fisicamente impossível. Assim, formulou-se uma hipótese para a multiplicação e divisão em que se aplica o módulo para o cálculo dos erros. (Relatório)

Na resolução da questão 3, os alunos aplicaram algumas das regras por eles deduzidos na questão anterior. Como a potenciação não fazia parte das operações já analisadas, sentiram necessidade de obter também uma regra para esta operação: “A questão 3 englobava uma operação elementar não abordada na questão 2, a potenciação, que se verificou ser um caso particular da multiplicação” (Relatório). Nesta questão também foram discutidos os conceitos de valor aproximado, erro e majorante do erro. Em particular podemos verificar que associaram um erro ao π e realizaram os cálculos com um majorante escolhido, em vez do seu valor aproximado, mostrando terem compreendido esses conceitos.

Desde o início do trabalho que tiveram o cuidado de registar o que estavam a fazer, como referido por Carlos: “Podemos é anotar as ideias que tivemos para depois fazermos o relatório, para não nos esquecermos. Qual é que foi a tua ideia inicial?”. O relatório entregue pelo grupo ilustra bem todo o trabalho desenvolvido, com os seus avanços e recuos, com todas as descobertas e ideias discutidas pelos alunos, mesmo as que consideraram não ser válidas.

Os elementos deste grupo participaram na aula de discussão da tarefa, mostrando grande dinamismo. Apresentaram as suas estratégias e conseguiram justificá-las perante

as interpelações dos colegas. Tiveram ainda oportunidade de observar outras estratégias, questioná-las e contra-argumentar.

Os alunos trabalharam bem em grupo. Todos os elementos colaboraram no trabalho dando as suas opiniões e esclarecendo as dúvidas uns dos outros, como se pode observar numa discussão inicial:

Zé: O C3 pode entrar se escolhermos o C3 e um C1.

Miguel: Não pode, não!

Zé: Assim não percebo...

Miguel: Não te esqueças que ele pode variar 10% do seu tamanho e ao mesmo tempo que um aumenta o outro também pode aumentar.

Zé: Ah! Está bem, está bem. Não tinha adicionado os 10%. E aplicamos os cabos com as bitolas a serem influenciadas ou sem serem influenciadas?

Miguel: Com!

Esta primeira tarefa de investigação proporcionou uma experiência positiva para o grupo e parece-me terem compreendido bem a natureza da tarefa. Na opinião de um aluno:

Eu acho que isto é bom. Eu acho que é bom termos várias possibilidades. Acho que é isto mesmo que se quer. É normal uma pessoa querer chegar a um resultado. Em Matemática uma pessoa quer muito um resultado. Mas acho que é isto que difere das aulas de Matemática que tivemos até agora. (Zé)

Tarefa 2 – Águas Ameaçadas

O trabalho do grupo iniciou-se com a leitura individual do enunciado, distribuído por mim no início da aula, sem qualquer comentário sobre o mesmo. Nesta tarefa pretendia abordar o tópico relativo à resolução de equações não lineares e verificar que estratégias eram utilizadas pelos alunos.

A questão 1, em que se propunha a construção de um gráfico para auxiliar o desenvolvimento das questões seguintes, foi a que levantou maiores dificuldades: “Esta questão, de entre todas as outras que nos deparámos ao longo desta tarefa, foi a que nos causou maiores dificuldades, pois enfrentámos algumas complicações no que diz respeito à representação gráfica da função”. Uma vez que os métodos de resolução de

equações não lineares eram desconhecidos dos alunos, as dificuldades acabaram por surgir. Os alunos referem que isso aconteceu quando

Tentámos isolar a variável λ correspondente à taxa de natalidade da população. Este caminho que a princípio nos pareceu imediato revelou-se matematicamente inviável ou pelo menos desadequado aos nossos conhecimentos, uma vez que não conseguimos isolar esta variável. (Relatório)

Após alguma discussão entre os elementos do grupo, utilizaram a exploração de vários exemplos (de equações não lineares mas polinomiais, por serem as suas conhecidas), de forma a chegarem a uma estratégia que os auxiliasse a ultrapassar esta dificuldade:

Assim, de forma a podermos visualizar melhor o nosso objectivo recorreremos inicialmente a equações mais simples:

$$(1) \quad 2x^3 + 10 = 20 \Leftrightarrow 2x^3 = 20 \Leftrightarrow x^3 = 10 \Leftrightarrow x = 10$$

$$(2) \quad x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ x = 0 \vee x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 0 \vee x = 4$$

Estas equações permitiram-nos, de forma simplificada, chegar à conclusão que para realizar a representação teríamos de fazer algumas substituições. (Relatório)

Nesta altura, com estas informações e utilizando alguns conhecimentos sobre funções, construíram um gráfico: "Vou colocar $\lambda = 1$. De qualquer forma, o gráfico mantém-se" (Miguel).

A máquina de calcular foi a partir daqui um meio auxiliar de trabalho, sendo exploradas as suas potencialidades para a visualização das várias funções e para a realização de aproximações sucessivas.

Na questão 2, os alunos foram solicitados a formular conjecturas sobre a variação do erro associado às possíveis soluções aproximadas. Segundo os elementos do grupo, era necessário recorrer à experimentação sistemática:

Carlos: Esta aqui é teórica.

Miguel: É teórica mas faz-se experiências.

Jordão: Vamos ter que diminuir a amplitude do intervalo que escolhemos e depois aumentar também, de forma a verificar o comportamento do erro.

O grupo mostrou alguma preocupação em justificar as conjecturas formuladas e as estratégias escolhidas, chegando mesmo a seleccioná-las com base na maior ou menor dificuldade em provar os resultados obtidos:

O grupo teve como primeira intenção recorrer a um método gráfico para a sua resolução. (...) Este método, após algum trabalho e desenvolvimento foi abandonado pelo grupo pela dificuldade em provar se o método seria fiável ou não, de forma a generalizar procedimentos. (...) O grupo definiu nova estratégia e tentou de alguma forma utilizar o Teorema de Bolzano. (Relatório)

O relatório, além de bastante desenvolvido no que diz respeito às estratégias adoptadas espelha bem o trabalho realizado uma vez que tiveram o cuidado de ir registando todas as ideias que iam surgindo. Verifiquei ainda que tiveram um grande cuidado e fizeram um esforço para formalizar os procedimentos adoptados e os resultados obtidos, como por exemplo, ao generalizarem o procedimento escolhido para a resolução de equações não lineares:

Se $f(x)$ for contínua num intervalo $[a,b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, então estamos nas condições do corolário do teorema de Bolzano e existe um número real $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.

Então, como $b - a = \alpha$ é a amplitude do intervalo inicial, que tem como valor aproximado de λ o valor $x_n = (a + b) / 2$, podemos concluir que:

$f(x_n) \times f(a) < 0 : \lambda \in [a, x_n]$ e consideramos $b = x_n$;

$f(x_n) \times f(b) < 0 : \lambda \in [x_n, b]$ e consideramos $a = x_n$;

[...] (Relatório)

Os alunos trabalharam de uma forma bastante autónoma pelo que a minha intervenção junto deste grupo, durante a realização da tarefa, foi pequena. Na aula de discussão, o grupo contribuiu com as suas estratégias e aperceberam-se de inúmeras possibilidades de que não se tinham lembrado. No final, os alunos fizeram um balanço muito positivo: “Esta tarefa correu substancialmente melhor que a anterior em termos de dinâmica de grupo” (Relatório).

Tarefa 3 – Ainda os lagos

Nesta tarefa foi disponibilizado um conjunto de dados, oriundos de uma experiência real, com significado para os alunos e cujo comportamento deverá ser modelado. Pretendia que os alunos seleccionassem, entre os modelos matemáticos conhecidos e através de critérios por eles definidos, o que melhor caracteriza esse comportamento, uma vez que o método dos mínimos quadrados é uma ferramenta que ainda não conheciam.

Os alunos iniciaram o trabalho logo após a distribuição do enunciado escrito da tarefa, recorrendo de imediato à máquina de calcular como meio auxiliar na visualização dos dados fornecidos, como referiram no seu relatório:

Construiu-se a tabela de valores disponibilizados no enunciado na máquina de calcular gráfica, com o intuito de verificar qual o seu aspecto gráfico. Após termos uma noção do comportamento do crescimento da população, recorreremos às funções da máquina de calcular (...).
(Relatório)

A utilização da máquina de calcular facilitou também a exploração da tarefa, permitindo elaborar e visualizar os gráficos de várias funções, comparar as respectivas representações e calcular os parâmetros desses modelos:

Recorremos às funções da máquina de calcular de forma a encontrar uma única recta que pudesse servir todos os pontos. Ao explorar este método verificou-se na máquina de calcular que se podia utilizar este mesmo raciocínio variando a linha, recorrendo, por exemplo, a polinómios de 2.º e 3.º grau. (Relatório)

A experimentação realizada pelos alunos deste grupo, apesar de feita através de visualização gráfica, seguiu determinada lógica e mostrou algum sentido crítico sobre a utilização dos diversos modelos. Por exemplo, foram aumentando sistematicamente o grau nas funções polinomiais e rejeitaram logo à partida outras funções, cujo comportamento se desviava muito do apresentado pelos dados. Exemplo disto é relatado da seguinte forma:

O grupo, utilizando o mesmo processo (funções da máquina de calcular), ainda estudou os gráficos das funções exponencial e logarítmica e, sem se efectuarem cálculos, verificou-se somente através da análise gráfica que os desvios em cada ponto eram superiores aos modelos estudados anteriormente. (Relatório)

O grupo considerou, no entanto, que a visualização do gráfico não era suficiente para justificar a escolha da função, sendo necessário uma justificação diferente:

Por esta altura o grupo tinha encontrado três funções que satisfaziam a condição inicial e prendia-se pela escolha do método mais apropriado. Foi escolhido como critério de selecção a diferença em módulo entre valores reais, representados por y na tabela, e as imagens gráficas correspondentes aos objectos da tabela (x). (Relatório)

Além disso, o grupo teve a preocupação de minimizar os erros associados aos modelos propostos e isso esteve na base da validação ou não das conjecturas formuladas e dos modelos seleccionados. A utilização do módulo da diferença entre os valores verdadeiros e estimados como base para a selecção de modelos, além de indiciar uma aprendizagem significativa do conceito de erro, mostrou que os alunos foram capazes de, intuitivamente utilizar um conceito não trabalhado e que está na base do método dos mínimos quadrados.

Como não eram pedidas generalizações, este processo não esteve presente no trabalho deste grupo. Este aspecto foi depois trabalhado e aprofundado na aula de discussão da tarefa, onde o grupo participou, mais uma vez, de forma bastante activa. Também não é visível neste trabalho qualquer tentativa de argumentação ou demonstração dos resultados obtidos.

Tarefa 4 – *Quem vai para o mar*

Esta tarefa proporcionou a abordagem da temática da integração numérica. Apesar do seu contexto ser real, o facto de no seu enunciado nada indiciar a necessidade de utilização de integrais, nem serem fornecidas quaisquer funções que pudessem servir esse fim, constituiu uma situação desconhecida dos alunos. Pretendia que os alunos explorassem várias situações de forma a poderem generalizar procedimentos e propor métodos de integração apropriados a essas situações.

Após a leitura do enunciado da tarefa, distribuído por mim no início da aula, os elementos do grupo iniciaram o seu trabalho discutindo entre si possíveis estratégias de exploração. O objectivo do grupo na questão 1 foi fazer explorações de forma a encontrar estratégias e procedimentos que permitissem responder às questões seguintes, em particular à última onde se pedia a sua generalização: “Para tentar responder a esta

questão, o grupo tentou encontrar um modelo que, de certa forma, facilitasse a resposta a esta questão bem como às seguintes”. (Relatório)

Uma primeira estratégia, que surgiu por sugestão de um elemento do grupo, foi a utilização de anteriores conhecimentos de física. Esta estratégia foi posta de lado por não terem conseguido argumentar a seu favor. Nesta altura ainda não se tinham apercebido do conceito de integral que estava subjacente ao contexto. Depois de identificado o tema a abordar com esta tarefa, tentaram utilizar o manual de forma a ‘resolver’ as questões. Também abandonaram prontamente esta estratégia pois não compreenderam os conceitos e procedimentos que estavam na base da construção das fórmulas a aplicar:

Ao ler a tarefa na íntegra, apercebemo-nos que seria necessário utilizar um método de integração numérica. O grupo tentou, através do livro de Análise Numérica, perceber alguns conceitos relacionados com esta temática e aplicar as fórmulas. No entanto, o facto de tentarmos entender as fórmulas e aplicá-las à nossa tarefa revelou-se complicado e com o passar do tempo desmotivador. (Relatório)

Após alguma discussão entre os elementos do grupo, optaram por utilizar as ‘ferramentas’ abordadas em unidades programáticas anteriores, como o ajuste de curvas. O grupo referiu a sua utilização da seguinte forma:

Assim, recorrendo à matéria da tarefa anterior, nomeadamente à nossa própria tarefa, construímos a tabela do enunciado na máquina de calcular para visualizarmos o seu aspecto gráfico. Recorrendo de imediato a um polinómio do 3.º grau, modelo sugerido na tarefa anterior, verificámos que o gráfico correspondente passava próximo de todos os pontos. (Relatório)

O facto de, num contexto novo, serem capazes de identificar e mobilizar conhecimentos já adquiridos e utilizarem-nos de forma correcta, reforça as aprendizagens realizadas.

A calculadora gráfica voltou a ser fundamental como ferramenta de auxílio à exploração: “Tínhamos assim, um gráfico que nos mostrava o comportamento da função em estudo. Apercebemo-nos então que a aplicação de integrais duplos nos daria a área da função e logo a quantidade de água nos tanques ao fim de 10 m” (Relatório).

Esta tarefa foi a que apresentou uma exploração menos desenvolvida e onde os alunos se perderam mais, talvez devido ao facto de ser menos estruturada que as

anteriores. Na questão 2, em que era solicitada uma exploração com 2 e 3 pontos, de forma a poderem generalizar regras encontradas, o grupo apenas apresentou um exemplo de cada. Apesar disso, no caso dos três pontos, a escolha foi pensada e seguiu uma lógica que os alunos justificaram:

Para a segunda parte os valores utilizados foram os que correspondem ao valor inicial, ao valor máximo e ao valor final da função no intervalo considerado. Foi utilizado o valor máximo da função de forma a aproximar melhor os intervalos de integração da curva, diminuindo assim o erro. (Relatório)

A formulação das conjecturas é feita de uma forma mais informal, através de visualização gráfica: “Com base nos resultados obtidos e, recorrendo aos respectivos gráficos, facilmente se verifica que o erro diminui com o aumento do número de pontos utilizados para a estimação” (Relatório).

Durante a exploração da tarefa, fui chamada para me explicarem o que tinham feito, para obterem aprovação ou confirmação de que o que estavam a fazer era o pretendido. Incentivei-os a utilizar outros métodos/estratégias, a explorarem mais casos e a justificarem os seus resultados. Apesar disso, as tentativas de justificação das conjecturas e sua generalização foram feitas informalmente. Confrontados com a necessidade de generalizar procedimentos, na questão final, escolheram a estratégia que dominaram melhor justificando por palavras suas:

O resultado obtido com os três pontos escolhidos é superior ao obtido apenas com a utilização de dois pontos. Graficamente, facilmente se verifica que o erro obtido nesta segunda aproximação é menor que o erro obtido na primeira. (Relatório)

Foi já na aula de discussão do trabalho que os alunos reconheceram outras possibilidades de exploração e defenderam, com raciocínios bastante desenvolvidos, as estratégias adoptadas e os resultados obtidos.

O relatório apresenta-se mais uma vez bastante cuidado, com muitas explicações dos resultados que apresentam, mas mais pobre que os anteriores em termos de exploração e utilização de processos.

Reflexões finais

Da análise dos dados obtidos a partir do trabalho realizado, por este grupo, nas tarefas investigativas propostas ao longo do semestre, destaco alguns aspectos que considero importantes para responder às questões do estudo. Embora os alunos se tenham empenhado muito neste tipo de actividade, o seu desempenho foi diferenciado nas diversas tarefas realizadas e parece ter sido influenciado por vários factores.

Processos

Durante o seu trabalho investigativo, os alunos usaram alguns processos matemáticos dos quais destaco: o registo e organização dos dados, especialização, procura de regularidades, formulação e teste de conjecturas, generalização, justificação e prova.

A formulação de conjecturas foi um processo que esteve presente em todas as tarefas apresentadas. Este processo baseou-se, quase sempre, na experimentação de vários casos e na procura de regularidades, como se pode observar no exemplo já apresentado da tarefa 1, em que os alunos tentam encontrar as regras operatórias pedidas no enunciado da tarefa.

O processo de especialização seguiu, quase sempre, uma lógica sistemática. Na tarefa 2, por exemplo, utilizaram a seguinte sistematização para chegarem à conclusão que “quanto menor for a amplitude do intervalo, menor será o majorante do erro do valor aproximado”:

Intervalo I: $[0,25;0,45] \Rightarrow \Delta\lambda = 0,1 > 0,05$

Intervalo II: $[0,2;0,5] \Rightarrow \Delta\lambda = 0,15 > 0,1 > 0,05$

Intervalo III: $[0,32;0,38] \Rightarrow \Delta\lambda = 0,03 < 0,05$

Intervalo IV: $[0,325;0,375] \Rightarrow \Delta\lambda = 0,025 < 0,03 < 0,05$ (Relatório)

Devido à grande interacção verificada entre os elementos do grupo, durante a exploração da tarefa, muitas vezes eram formuladas várias hipóteses simultâneas que eram depois testadas através de exemplos. Esta necessidade foi sentida pelos alunos que a referiram da seguinte forma, nos seus relatórios:

Foram formuladas duas hipóteses das quais resultaram as fórmulas

$$H1: C1 \times C2 = (B1 \times B2) \pm (E1 \times E2)$$

$$H2: C1 \times C2 = (B1 \times B2) \pm ((B1 \times E2) + (B2 \times E1) + (E1 \times E2))$$

Para se verificarem ambas as hipóteses, utilizámos os exemplos seguintes: [...] (Relatório)

[...] tendo-se depois verificado o resultado obtido com vários outros exemplos. (Relatório)

Este processo, nalguns casos, levou mesmo os alunos a refinar as suas conjecturas e a imporem restrições ou condições de aplicabilidade às regras ou métodos por eles propostos. São disso exemplo:

Depois de verificada a 2.^a hipótese, é opinião do grupo que o cálculo associado ao erro ($E1 \times E2$) não é necessário uma vez que se tem a noção que ΔN é igual a metade da amplitude, obtendo-se assim a fórmula:

$$C1 \times C2 = (B1 \times B2) \pm ((B1 \times E2) + (B2 \times E1)) \text{ (Relatório)}$$

Assim obtivemos uma equação que continha uma e só uma raiz real contida no intervalo $[a,b]$, condição essencial para podermos aplicar o método proposto utilizando o corolário do T. de Bolzano. (Relatório)

Os alunos, ao longo do trabalho de investigação, tentaram sempre explicar e justificar o seu trabalho, baseado em conhecimentos adquiridos anteriormente tanto nas disciplinas de Matemática como em outras disciplinas. A justificação surgiu sempre de uma forma espontânea, sem ser necessária a minha intervenção no sentido de desafiá-los. É aliás visível, a necessidade sentida pelos alunos em demonstrar, mais ou menos formalmente, as suas estratégias e raciocínios, levando-os mesmo a abandoná-los quando este processo se torna difícil:

Tentou-se provar então que a amplitude do intervalo, definido entre o valor desta intersecção e o valor da abcissa no ponto conhecido, seria cada vez menor à medida que as rectas secantes se aproximavam da recta tangente ao gráfico. Este método, após algum trabalho e desenvolvimento foi abandonado pelo grupo pela dificuldade em provar se o método seria fiável ou não, de forma a poder generalizar procedimentos. (Relatório)

A demonstração envolveu muitas dificuldades e raramente se apresentava correcta e completa. Tenho, no entanto, que reconhecer o esforço empreendido pelos alunos num processo que, na maioria dos casos, não lhes era acessível.

Aprendizagem da Análise Numérica

Desenvolver metodologias e acções capazes de promover nos alunos aprendizagens significativas é um dos objectivos deste trabalho. Os alunos reconhecem as potencialidades deste tipo de actividades para a aprendizagem da Análise Numérica e desenvolveram a compreensão de alguns tópicos programáticos abordados no decorrer do semestre.

Em todas as tarefas os alunos revelaram uma grande preocupação com os erros resultantes dos cálculos realizados, sobretudo quando surgia a necessidade de efectuar aproximações, denotando alguma compreensão destes conceitos. A correcta identificação das fontes de erro e a preocupação de os diminuir ou quantificar são visíveis em várias situações:

Ao realizar os cálculos intermédios houve o cuidado de se utilizar mais um algarismo significativo do que o número de algarismos correspondente ao resultado final, de forma a se obter uma maior margem de segurança nos arredondamentos. (Relatório)

Carlos: Este não é um bom exemplo porque vamos ter que entrar com o erro da máquina. Utiliza o valor de baixo.

Miguel: Mas eu conheço o erro da máquina

Conclui-se então que o valor aproximado é de 0,35 com um erro associado de 0,05. (Relatório)

À excepção de alguns casos particulares envolvendo funções polinomiais, os alunos não tinham ferramentas para resolver equações não-lineares. O conceito de método iterativo surgiu assim de uma forma intuitiva e foi aplicado correctamente na resolução deste tipo de equações. Isto é referido pelos alunos da seguinte forma:

Para a determinação desta raiz recorreu-se a um método que assenta no pressuposto de, a partir de um intervalo inicial, encontrar novos intervalos tão pequenos quanto se queira, recorrendo a processos iterativos, ou seja, dividindo estes intervalos sucessivamente ao meio. (Relatório)

Na tarefa 3 foi possível verificar o desenvolvimento de aprendizagens relativas ao ajustamento de curvas pelo método dos mínimos quadrados. O exemplo seguinte

mostra que os alunos compreenderam intuitivamente o conceito que está na base da construção deste método, ao usarem, o módulo das diferenças entre os valores experimentais, disponibilizados no enunciado da tarefa e os valores obtidos com os diferentes modelos matemáticos que exploraram, para seleccionar o melhor ajustamento.

Por esta altura o grupo tinha encontrado três funções que satisfaziam a condição inicial e prendia-se pela escolha do método mais apropriado. Foi escolhido como critério de selecção a diferença entre valores reais, representados por y na tabela, e as imagens gráficas correspondentes aos objectos da tabela (x). (Relatório)

Os alunos desenvolveram ainda conhecimentos ao nível de gráficos de funções. Estes conhecimentos foram aplicados correctamente em várias tarefas, estando mais destacados na tarefa 3 já descrita anteriormente, quando, através da análise do comportamento do gráfico de determinadas funções, as rejeitam considerando-as desadequadas para ajustar os dados.

A sequência dos conteúdos programáticos abordados nas tarefas foi outro factor que me pareceu favorecer a aprendizagem da Análise Numérica. Na verdade, os alunos foram utilizando os conhecimentos que iam adquirindo nas tarefas anteriores e reforçando, deste modo, as suas aprendizagens. Foi, no entanto, na tarefa 4 que mais se notou a capacidade de mobilização de conhecimentos e processos adquiridos durante a realização das tarefas anteriores. O método dos mínimos quadrados foi uma das abordagens utilizadas pelos alunos nesta tarefa e que justificaram da seguinte forma:

Recorrendo à matéria da tarefa anterior, nomeadamente à nossa própria tarefa, utilizámos um polinómio do 3.º grau e verificámos que o seu gráfico passava próximo de todos os pontos. (Relatório)

A resposta à 1.ª questão surgiu de um consenso do grupo, baseado em conhecimentos adquiridos anteriormente, bem como na disciplina de Análise Numérica. (Relatório)

A aquisição de conhecimentos ligados aos tópicos programáticos abordados na disciplina de Análise Numérica não me parece ter esgotado o processo de aprendizagem dos alunos. Várias vezes referem que, depois de explorada a tarefa, tentaram abordá-la de outra forma, pesquisando no manual 'outra maneira de fazer':

Como última hipótese, o grupo ainda tentou aplicar um método analítico recorrendo ao livro Fundamentos de Análise Numérica. [...]. Mas após alguns cálculos e com a sensação que nos encontrávamos a deambular numa matéria que não compreendemos na sua plenitude, adoptámos outra estratégia. (Relatório)

Embora se tenham deparado com dificuldades e se tenham perdido um pouco não chegando a concretizar ideias, parece-me que a realização destas tarefas pode ter contribuído para desenvolver, nos alunos, um espírito investigativo. A capacidade de comunicação e o espírito crítico foram também alguns aspectos que referiram como fazendo parte do que consideram ser aprendizagens significativas: “É também nossa opinião que este trabalho tem o intuito de desenvolver o espírito crítico dos alunos”.

Factores que influenciaram os processos e as aprendizagens

A natureza das tarefas e o seu grau de estruturação, a utilização da máquina de calcular e o trabalho de grupo, foram alguns factores que terão influenciado a presença, no trabalho realizado por este grupo, dos processos matemáticos já descritos.

O enunciado da tarefa, sobretudo o grau de estruturação das questões, podem desencadear a utilização de um maior ou menor número de processos matemáticos, permitindo aos alunos seguirem várias abordagens ou fazendo com que se sintam perdidos devido à sua falta de experiência neste tipo de actividades. Foi esta situação que se verificou na última tarefa proposta e que voltou a ser aquela que desencadeou o uso de um menor número de processos matemáticos.

A contextualização das tarefas na vida real pode influenciar a sua exploração, como explicaram os alunos na tarefa 1: “Ao terminar o trabalho reparou-se que apenas se haviam efectuado cálculos com números positivos; pois o exemplo dos cabos não contempla números negativos por ser fisicamente impossível”. Apesar disso, o trabalho deste grupo não ficou limitado aos números positivos, embora o diálogo seguinte mostre que, em várias alturas, os alunos sentiram a necessidade de se abstrair do contexto para poderem progredir nas tarefas:

Carlos: Esperem lá, qual é então a ideia principal?

Miguel: Pois é, é que eu não percebo.

Zé: A ideia é essa... Fazermos as operações com as bitolas.

Carlos: Mas para que é que realizas estas operações todas? Qual é a finalidade delas?

Zé: Eu acho que vocês estão a ver este problema muito do Marinheiro. Não lîgues ao Marinheiro. Isto são números, não é bitolas.

Carlos: Isto é como o Zé diz. Não nos vamos focalizar no contexto da história. A história está ali para dar contexto à situação. A partir daqui vamos pôr hipóteses e vamos mais pelas operações. Temos que largar um bocadinho a prática.

No entanto, este factor foi também referido pelos alunos como positivo e do seu agrado:

Eu gosto mais desta forma porque o ano passado, e falo como repetente, via uma coisa pura e simplesmente teórica, sem aplicação nenhuma. Teria aplicações matemáticas mas aplicação nenhuma aos meus olhos e agora vejo. (Zé)

É importante ver uma aplicação prática da Matemática. (Carlos)

É mais fácil trabalhar com alguma coisa que podemos ver, por assim dizer, do que trabalhar com alguma coisa completamente abstracta. Estas tarefas obrigam-nos a pesquisar, a entrar mais no mundo da Matemática. (Miguel)

A utilização da máquina de calcular favoreceu a formulação de conjecturas e a sua rápida verificação, sobretudo nas últimas tarefas. Permitiu ainda que grande parte da exploração fosse feita através de análise gráfica: "Nos gráficos seguintes, facilmente se verifica que o erro diminui com o aumento do número de pontos utilizados para estimação" (Relatório).

Os alunos trabalharam de uma forma bastante autónoma, pelo que a minha intervenção junto do grupo foi discreta e apenas quando solicitada no sentido de os ajudar a ultrapassar alguns impasses que surgiram. Nestas situações evitei sempre dar respostas directas que pudesse minimizar a atitude investigativa dos alunos, o que foi visto por eles como um factor positivo:

Não orienta de uma maneira directa, tem espicaçado. (Zé)

Eu acho curiosa a maneira como nos tem orientado. Orienta-nos com perguntas. Na altura, se calhar nós queremos respostas mas no final acaba por ser mais produtivo. (Carlos)

As aulas de discussão das tarefas proporcionaram a realização de novas descobertas e obrigaram os alunos a procurar justificações para os seus raciocínios, quando confrontados com as opiniões dos outros colegas. Nestas aulas o grupo participou sempre de uma forma muito dinâmica e referem-nas também como importantes na valorização do trabalho realizado e como complemento do relatório:

Acho que tem vantagens por dois factores: primeiro, porque permite conhecer o trabalho de outros camaradas. São abordagens sempre diferentes a uma tarefa que tivemos de realizar e é importante ver como é que as outras pessoas reagiram nas mesmas tarefas e nas mesmas condições. Acho que é interessante por isso. Em segundo lugar há coisas que nós colocamos no papel e que nem sempre conseguimos exprimir da melhor maneira. Então, temos ali uma oportunidade para, verbalmente, tornar-se mais fácil expor o nosso modelo ou a nossa tarefa ou o nosso raciocínio. (Carlos)

Em relação ao trabalho de grupo, os alunos afirmam gostar desta organização de trabalho, reconhecendo as suas vantagens ao nível da facilidade em ultrapassar obstáculos e da divisão do trabalho por vários elementos permitindo assim mais e diferenciadas estratégias.

O trabalho de grupo é bastante bom porque permite-nos não bloquear numa resposta. (Miguel)

Tem uma componente também importante que é a distribuição do trabalho, sobretudo nas alturas em que temos mais trabalho. (Carlos)

A participação de todos os elementos facilitou bastante as respostas às questões colocadas uma vez que o universo de hipóteses foi assim superior.-(Relatório)

Reconhecem ainda que todos contribuíram com algumas ideias que ajudaram a avançar no trabalho.

Este grupo realçou ainda, como um factor facilitador da aprendizagem, a utilização das tarefas como meio de abordagem aos conteúdos programáticos da disciplina: “Começamos a embrenhar-nos numa matéria através de um raciocínio nosso. Assim facilita a aprendizagem” (Carlos).

Dificuldades

As principais dificuldades sentidas por este grupo, sobretudo nas primeiras tarefas de investigação, prendem-se com a falta de experiência na realização deste tipo de actividade e com a interpretação do enunciado e sua contextualização. Os alunos referem-se às dificuldades sentidas desta forma:

A tarefa que nos foi proposta teve a princípio um grau de dificuldade bastante elevado principalmente por nenhum dos elementos estar habituado a realizar este tipo de tarefas. (Relatório)

O texto apresentado inicialmente é de fácil compreensão. No entanto comprovou-se, com o evoluir da tarefa, que esta contextualização limitou o seu progresso pois os elementos do grupo tiveram tendência para raciocinar baseados nos aspectos práticos da arte de marinheiro e não tanto nos aspectos matemáticos, revelando-se esta a maior dificuldade encontrada pelo grupo. (Relatório)

Os alunos não evidenciaram grandes dificuldades na elaboração dos relatórios das tarefas de investigação uma vez que estes se apresentaram bastante completos, relativamente ao trabalho desenvolvido, e quase sempre com uma linguagem matemática adequada. Parece-me também que compreenderam facilmente a natureza das tarefas e o que pretendia com a sua realização, quando afirmam:

Esta tarefa tem como objectivo a resposta às questões colocadas recorrendo à formulação de hipóteses e sua posterior verificação com vista a desenvolver não só o espírito crítico dos alunos, mas também permitir uma melhor reflexão e compreensão destes assuntos quando forem tratados nas aulas. (Relatório)

Nesta tarefa esteve também em foco a capacidade de generalizar e de inferir factos partindo de um caso particular, inferindo propriedades e procedimentos no âmbito desta matéria. (Relatório)

CAPÍTULO 7

Aprendizagens em Análise Numérica e Concepções dos Alunos

Introdução

Com o objectivo de obter as opiniões dos alunos sobre a experiência realizada nas aulas de Análise Numérica e de analisar o efeito das actividades de investigação nas suas concepções e atitudes face à Matemática, foram aplicados dois questionários, a todos os alunos das duas turmas.

O questionário inicial (Anexo 8), aplicado na primeira aula do semestre, é constituído por vinte e sete questões fechadas estruturadas segundo três dimensões: concepções dos alunos sobre a Matemática, hábitos de estudo e auto-imagem enquanto aluno de Matemática. Considerei estas dimensões por abrangerem, no seu conjunto, aspectos essenciais do funcionamento de uma disciplina, na perspectiva dos alunos.

O questionário final (Anexo 9) foi distribuído a todos os alunos, na última aula do semestre, já depois de ter sido realizado o teste de avaliação e foi preenchido nessa mesma aula. As suas vinte e oito questões fechadas estão divididas em duas partes, de acordo com os objectivos pretendidos. Assim, com as primeiras treze questões pretende-se obter as opiniões dos alunos sobre a experiência realizada nas aulas de Análise Numérica, relativamente às actividades propostas, às dificuldades sentidas e ao modo como se desenvolveu o seu processo de aprendizagem. As restantes quinze questões referem-se aos aspectos já abordados no questionário inicial e têm como objectivo a análise das alterações verificadas nas concepções e atitudes dos alunos sobre a Matemática, após a experiência vivida. Neste questionário final foram também acrescentadas questões abertas, onde os alunos tiveram a oportunidade de acrescentar comentários que considerassem pertinentes, relativamente à experiência vivida, aos aspectos que consideraram positivos ou negativos e dar sugestões para o trabalho futuro da professora.

A análise exhaustiva dos resultados fornecidos pela aplicação deste instrumento seria muito extensa, devido ao número elevado de questões que constituíam os dois questionários. Considerei por isso preferível, fazer uma pesquisa com maior

profundidade em torno dos aspectos mais ligados aos objectivos da investigação. Desta forma, esta análise incide apenas sobre algumas questões cujo estudo detalhado inclui um tratamento quantitativo e uma análise de conteúdo.

Como referi no capítulo da metodologia, para a análise das respostas aos questionários, utilizei, para as questões fechadas, procedimentos básicos descritivos tendo organizado os resultados em tabelas de frequências, por questão analisada. O tratamento das distribuições obtidas para cada uma das variáveis envolvidas passou ainda pela utilização de gráficos de barras construídos com o auxílio do programa Excel. Para as questões que são comuns aos dois questionários, apresento os resultados em simultâneo de forma a facilitar a sua leitura e compreensão. As questões abertas foram tratadas através de análise de conteúdo.

Influência das actividades investigativas nas concepções dos alunos

O efeito das actividades de investigação nas concepções de Matemática dos alunos, nos seus hábitos de estudo e na auto-imagem enquanto aluno de Matemática foi analisado com base nas respostas obtidas nas questões fechadas dos dois questionários e das respostas abertas ao questionário final. Esta análise foi realizada, tendo em consideração as três dimensões do questionário já descritas.

Concepções sobre a Matemática

É usual os alunos pensarem que a Matemática que se aprende na escola tem pouco ou nada a ver com o mundo real. Esperava que os alunos, após as tarefas de investigação, reconhecessem a aplicação e a utilidade prática dos conteúdos da disciplina de Análise Numérica, uma vez que estas lhes foram apresentadas em contextos reais, relacionados com o seu quotidiano.

Assim, sobre a questão “A Matemática que se aprende na escola tem pouco ou nada a ver com o mundo real”, a opinião dos alunos, antes das tarefas, estava dividida entre os que discordavam (48%) e os que concordavam (39%) com esta afirmação, havendo ainda 13% que não concordavam nem discordavam. Após as tarefas, o número de respostas concordantes (26%) diminuiu claramente e mais de metade dos alunos passou a discordar (52%), embora tenha havido também um aumento dos alunos sem opinião formada (22%).

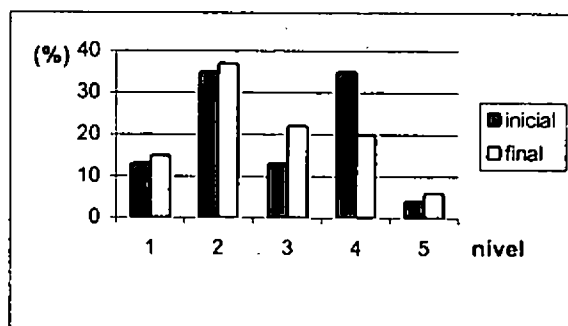


Figura 1 – Opiniões dos alunos sobre a contextualização da Matemática

De acordo com os resultados, os alunos alteraram a sua perspectiva com as actividades de investigação. Nas respostas às questões abertas do questionário, após a experiência pedagógica, a contextualização da Matemática proporcionada pela realização das tarefas foi um dos aspectos positivos mencionados pelos alunos:

[A nova metodologia] leva os alunos a pensar na Matemática como uma ciência aplicável.

[As tarefas] Ajudam a colocar em prática aquilo que se aprende na sala de aula conseguindo assim perceber como aplicar os conhecimentos da disciplina no nosso dia a dia.

Este novo método ajuda a aplicar a Matemática ao mundo real.

[Este método] Estimulou o nosso gosto pela Matemática e vemos que às vezes a Matemática tem prática no dia a dia, mas não a usamos muitas vezes.

[As tarefas] Ajudam-nos a pôr em prática os conceitos adquiridos ao longo da nossa aprendizagem e sobretudo nos ajuda a perceber o significado real da Matemática.

Uma boa maneira de compreender aonde é que se pode usar os conhecimentos de Matemática no nosso quotidiano.

Acredito que é benéfico relacionarmos a Matemática das aulas com o mundo exterior.

Também na questão “Os problemas de Matemática têm uma e uma só resposta correcta” esperava que houvesse uma alteração no sentido das respostas e que um número significativo de alunos optasse por discordar com esta afirmação.

Antes das actividades investigativas, 13% dos alunos discordavam totalmente, 46% discordavam parcialmente, 10% não concordava nem discordava, 21% concordavam parcialmente e 10% também concordava mas totalmente. Após as actividades de investigação, foi visível um aumento muito significativo dos que discordam totalmente (57%) diminuindo também significativamente para 6% os que de alguma forma concordavam com este ponto de vista.

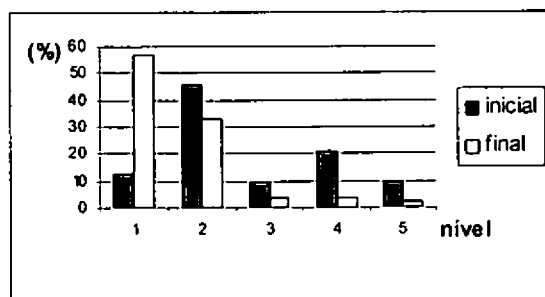


Figura 2 – Opiniões dos alunos sobre a unicidade das respostas

Os resultados confirmam assim, uma alteração significativa nas opiniões dos alunos com a introdução das actividades de investigação. Nas respostas abertas a unicidade de respostas e estratégias foi comentada, por alguns alunos, da seguinte forma:

[Ajudou-me] O facto de apercebermo-nos que não existe uma só solução correcta, e verificar as várias maneiras de raciocinar.

O que mais me agradou foi a maneira como podíamos resolver os problemas de várias formas.

A promoção do raciocínio é um dos objectivos educacionais da metodologia de ensino-aprendizagem aplicada. Solicitados a dar a sua opinião sobre “Nas aulas de Matemática sou estimulado(a) a raciocinar” a grande maioria dos alunos (88%) concordou com a afirmação no inquérito inicial, opinião que mantiveram depois da realização das tarefas.

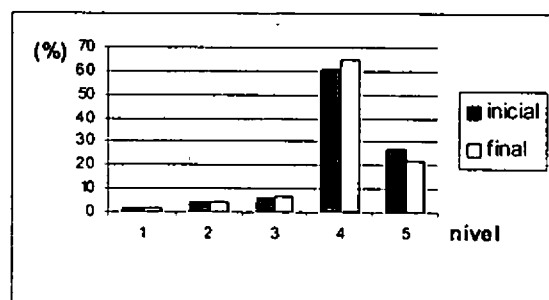


Figura 3 – Opiniões dos alunos sobre o estímulo ao raciocínio

É um facto conhecido que a grande maioria dos estudantes considera o desenvolvimento do raciocínio como objectivo principal das aulas de Matemática, independentemente da metodologia de ensino-aprendizagem utilizada. A análise destes resultados sugere que é possível que os alunos não tenham entendido o que se pretendia com a questão e que exprimiram a sua opinião relativamente às disciplinas de Matemática, tal como a conhecem nos moldes tradicionais, e reforçado essa opinião quando experimentaram as actividades de investigação. As respostas dos alunos às questões abertas mostram, todavia, que muitos deles se aperceberam que essa era uma das aptidões que tentei promover.

É uma actividade que leva os alunos a raciocinar.

São muito importantes porque nos ajudam a raciocinar.

Impõe maior capacidade e predisposição para o raciocínio por parte dos alunos.

Ao início foi um bocado complicado, não sabíamos como devíamos pensar para resolver os exercícios, mas ao longo das tarefas o raciocínio ficou mais fácil e rápido.

Faz com que uma aula que tradicionalmente se fazia mecanizando os exercícios se transforme num problema de resolução lógica onde mais de metade do exercício se fazia pensando.

Ajuda no aumento da capacidade de raciocínio, já que ao haver uma troca de ideias perante uma situação nova nos faz pensar e relacionar as ideias do grupo.

De certa forma relacionada com a percepção, por parte dos alunos, da importância da promoção do raciocínio, surge a questão “Na Matemática o mais importante não é o cálculo”. Seria de esperar resultados idênticos aos da questão

anterior, não fosse o cálculo uma abordagem à Matemática muito comum ao longo da escolaridade dos alunos.

Antes das tarefas, quase metade dos alunos (47%) concordava com a afirmação contra 36% de opiniões discordantes. Após a experiência vivida, diminuiu para 22% os discordantes e as respostas concordantes aumentaram para 54%, verificando-se também um aumento de respostas sem opinião de 17% para 24%.

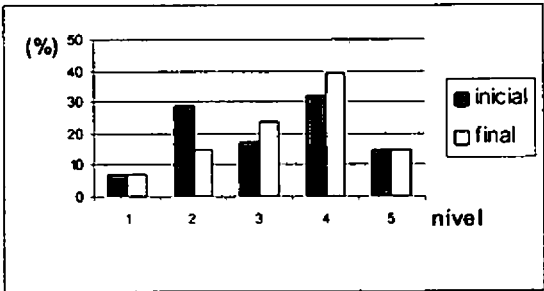


Figura 4 – Opiniões dos alunos sobre a importância do cálculo

Constata-se, pelas opiniões maioritariamente concordantes, que os alunos reforçaram a opinião inicial após as actividades de investigação.

Quanto às concepções relativas aos papéis do professor e do aluno no processo de ensino-aprendizagem elas não parecem ter sido influenciadas pelas actividades investigativas. As opiniões expressas pelos alunos relativamente às questões “O papel do professor é transmitir conhecimentos de Matemática e verificar se os alunos os adquiriram” e “O papel do aluno é receber conhecimentos de Matemática e demonstrar que os adquiriram” mostram que estes continuam a ver o professor como transmissor de conhecimentos e o aluno como receptor dessa informação.

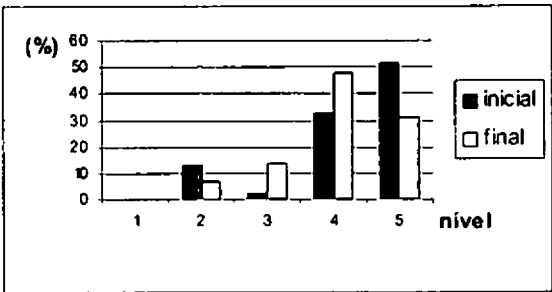


Figura 5 – Opiniões dos alunos sobre o papel do professor

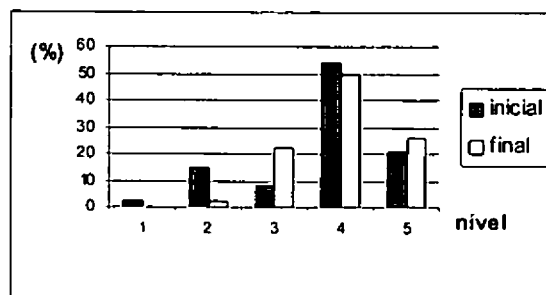


Figura 6 – Opiniões dos alunos sobre o papel do aluno

Os resultados referentes à questão “A Matemática é uma actividade sobretudo individual” ilustram uma modificação explícita no que concerne à visão dos alunos relativa à Matemática enquanto actividade solitária, uma vez que houve uma diminuição para metade do número de respostas de alguma forma concordantes (de 31% para 15%) após a intervenção pedagógica, tendo o número de discordantes assumido uma expressão também diferente (50% para 61%).

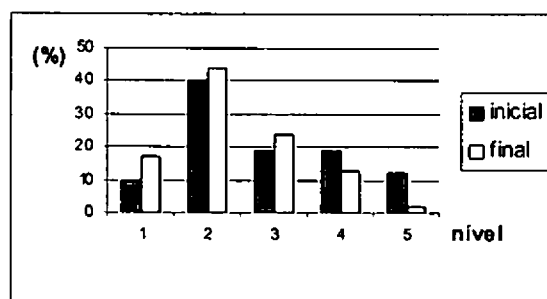


Figura 7 – Opiniões dos alunos sobre o carácter individual da actividade Matemática

A visão da Matemática revelada por estes resultados parece ter a ver também com novos hábitos de trabalho e de estudo experimentados pelos alunos nesta disciplina ao longo do semestre.

Hábitos de estudo/trabalho

As questões seguintes dirigem-se, sobretudo, às atitudes dos alunos face ao trabalho em equipa e à aprendizagem em pares. A análise dos resultados da questão “Agrada-me participar em debates ou discussões abertas” mostra que este tipo de actividade granjeou alguns adeptos: Antes da realização das tarefas, 21% dos alunos discordava parcial ou totalmente e 65% concordava (40% dos quais só parcialmente).

Após as actividades investigativas, 85% dos alunos passaram a concordar e 6% discordam mas apenas parcialmente.

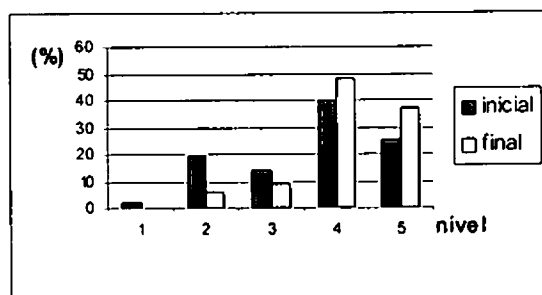


Figura 8 – Opiniões dos alunos sobre os debates

As discussões suscitadas pela realização de tarefas investigativas, quer entre os elementos dos grupos, quer com toda a turma, parecem ter sido do agrado dos alunos. Pelo menos assim o indica as referências positivas que fizeram, nas questões abertas, a este aspecto do trabalho desenvolvido:

O que mais me agradou foram os debates.

O que mais me agradou foi o facto de discutirmos tarefas.

O que mais me agradou foi o debate realizado entre os membros do grupo.

O que mais me agradou foi poder discutir ideias, porque 4 cabeças pensam melhor que uma.

O debate foi o que melhor houve para adquirirmos conhecimentos e percebermos a matéria lecionada, isto porque no debate há sempre várias ideias em "cima da mesa".

Agradou-me o trabalho de grupo e os debates, as trocas de pontos de vista dos diferentes grupos.

Esperava que a análise da questão "Na aula prefiro trabalhar em grupo" fornecesse resultados idênticos à anterior, uma vez que a participação em debates é, por si só, um trabalho em grupo. Efectivamente confirmaram-se as expectativas uma vez que antes da realização das tarefas as opiniões dos alunos estavam muito divididas entre os parcialmente discordantes (25%), os parcialmente concordantes (29%) e os que não emitem opinião (23%). Após este tipo de actividades, os discordantes passaram a ser

6% aumentando as opiniões concordantes, parcial e totalmente para 37% e 26%, respectivamente.

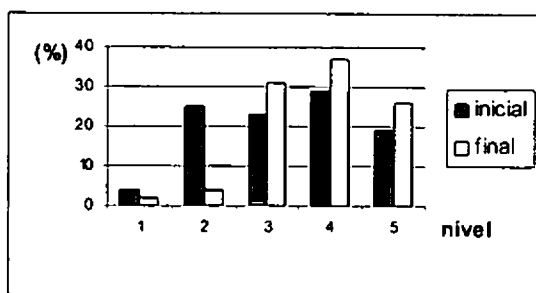


Figura 9 – Opiniões dos alunos sobre o trabalho de grupo

Os resultados reflectem uma modificação, após as actividades de investigação, no sentido de ser importante para os alunos a partilha de informação entre os colegas. A menção que é feita a aspectos relacionados com o trabalho de grupo (apontados como positivos nas respostas abertas do questionário), reforçam e clarificam esta tendência:

O trabalho de grupo alicia muito.

O que mais agradou foi o trabalho em grupo.

O que mais me agradou foi o facto de poder trabalhar em grupo.

Relativamente à questão “Não me agrada escrever”, a opinião de metade dos alunos (50%) manteve-se discordante, parcial ou totalmente. Verificou-se apenas uma ligeira descida nas opiniões parcialmente concordantes (de 30% para 22%), após a realização das tarefas, que foram reforçar o número de alunos sem opinião.

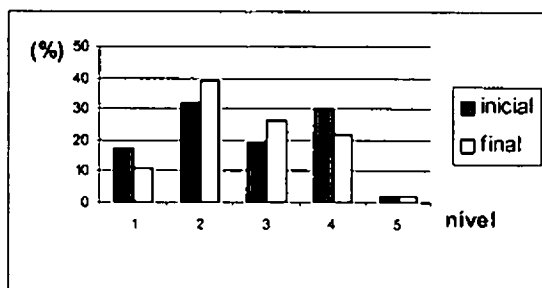


Figura 10 – Opiniões dos alunos sobre a escrita

Embora não se tenham verificado subidas nas opiniões discordantes, penso ser um factor positivo a diminuição do número de alunos concordantes, apesar de não terem opinião formada, por enquanto. Dadas as reconhecidas dificuldades alegadas pelos alunos sobre a escrita, é natural que este gosto pela escrita só venha com a continuação de actividades que desenvolvam essa capacidade.

A escrita dos relatórios das tarefas foi, aliás, um dos aspectos que os alunos menos gostaram, não só por ser aquele em que demonstraram mais dificuldades na experiência mas, sobretudo, por ser um modo de avaliação. Este facto está bem explicito nos seus comentários às questões abertas e que apresento mais à frente.

Auto-imagem enquanto alunos de Matemática

A realização das tarefas de investigação parece ter tido alguma influência na percepção, por parte dos alunos, não só da necessidade de mobilizar conhecimentos adquiridos e relacioná-los, como também das dificuldades inerentes a estes processos. Nas respostas à questão “Tenho dificuldade de relacionar novos temas com as experiências pessoais ou conhecimentos anteriormente adquiridos”, verificou-se uma diminuição dos parcialmente discordantes, de 62% para 53%, com um aumento dos sem opinião. Não houve nenhuma opinião totalmente concordante.

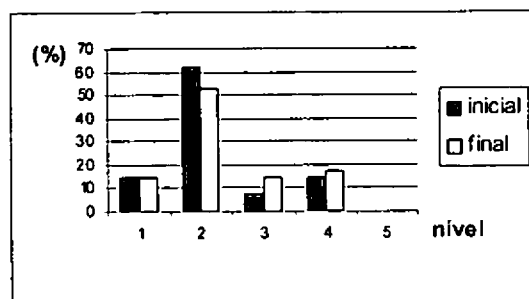


Figura 11 – Opiniões dos alunos sobre as suas dificuldades

No entanto, nas respostas abertas do questionário final foi registada uma afirmação que aponta para uma atitude muito favorável em relação a este aspecto:

O que mais me agradou foi constatar que podia aliar os meus conhecimentos (os mais diversos, química, física, estatística).

Solicitados a manifestarem a sua opinião sobre se a sua estratégia de aprendizagem passa pela memorização de factos, com a questão “Só consigo aprender Matemática se memorizar os factos”, a discórdia inicial é evidente (79%) e não há alterações significativas a registar pela realização das actividades de investigação.

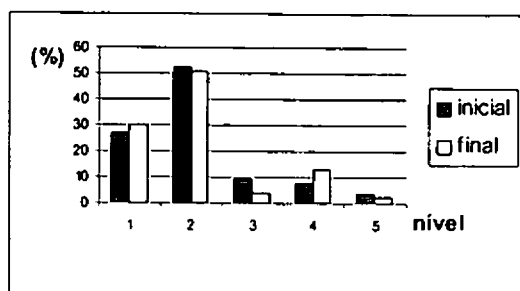


Figura 12 – Opiniões dos alunos sobre a memorização na aprendizagem

Os resultados estão de acordo com a opinião já manifestada pelos alunos, sobre a sua concepção da Matemática, à questão “A maioria dos alunos não pode esperar compreender Matemática mas apenas memorizá-la e aplicar aquilo que aprenderam de um modo mecânico”, no sentido de ser desvalorizada a memorização e valorizada a necessidade de compreender a Matemática.

No que concerne a serem capazes de avaliar o seu nível de conhecimentos sobre a disciplina, as opiniões à questão “Consigo avaliar o que sei sobre os conteúdos da disciplina” são maioritariamente concordantes (73%) mas após as actividades de investigação, diminuiu o número dos alunos que concordaram, e aumentou os que não tinham opinião, respectivamente para 59% e 35%.

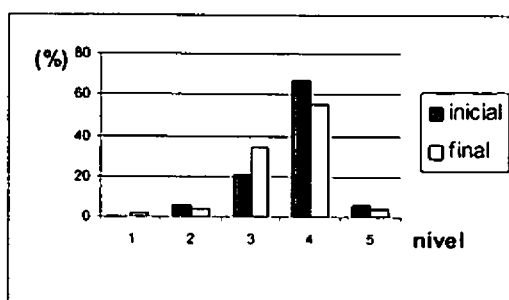


Figura 13 – Opiniões dos alunos sobre a capacidade de auto-avaliação

Alguns alunos, após as actividades de investigação sentiam-se menos capacitados para identificar os seus níveis de conhecimentos. Estes resultados poderão estar relacionados, por um lado, com o número reduzido de aulas atribuído às tarefas de investigação e, por outro, com a manutenção de hábitos normalmente associados ao ensino centrado no professor e às metodologias transmissivas. Torna-se difícil compreender estas opiniões até porque os meus comentários aos relatórios foram referidos, pelos alunos, como um factor importante na melhoria da qualidade dos mesmos e consequentemente das suas classificações. Nas respostas às questões abertas do questionário, não foram encontrados comentários que possam clarificar melhor esta opinião dos alunos.

Opiniões dos alunos sobre a experiência

As opiniões dos alunos de ambas as turmas sobre a experiência realizada nas aulas de Análise Numérica, relativamente às actividades propostas e ao modo como se desenvolveu o seu processo de aprendizagem, foram recolhidas através do questionário final.

Atendendo aos resultados obtidos na questão Q13: "Agrada-me a metodologia de ensino utilizada nesta disciplina" podemos afirmar que esta foi do agrado da maioria dos alunos (56%). No entanto, o facto de haver 12 alunos (24%) que são discordantes e 10 alunos (20%) sem opinião formada, levou-me a tentar compreender quais os aspectos que poderão ter contribuído para estas respostas. Deste modo, comecei por analisar as questões relativas ao meu desempenho, enquanto professora, nas tarefas de investigação.

Quando solicitados a dar opinião sobre a Q1: "As indicações dadas pela professora foram suficientes para a realização das tarefas", 5 alunos (10%) discordaram mas apenas parcialmente, 8 (16%) não concordaram nem discordaram, 32 (64%) concordaram parcialmente e 5 (10%) concordaram totalmente. Verifica-se assim, que a maioria dos alunos concordou em que as indicações foram suficientes, não havendo qualquer registo totalmente discordante.

Os alunos que se exprimiram de forma parcialmente discordante, poderão não ter compreendido a questão e responderam relativamente à dificuldade inerente à própria tarefa, como sugerem os seus comentários nas questões abertas.

Trabalhos mais precisos: 'Olha faz isto' ou 'quero isto'.

Apenas às vezes mais clarividência nas perguntas efectuadas e às vezes colocarmos perguntas à professora e ela não responde exactamente aquilo que perguntámos.

[Alterava] A clareza das perguntas, acrescentava esquemas que nos desse indícios ou "pistas" de uma possível resolução.

Tivemos muita dificuldade em perceber o que era pretendido na tarefa.

A dificuldade de interpretação das questões das tarefas foi expresso por 33% dos alunos e poderá ter a ver com a inexperiência dos alunos neste tipo de actividade ou com a possibilidade das questões colocadas nas tarefas serem muito abertas.

As questões Q8: "As indicações dadas pela professora foram suficientes para a realização do relatório de grupo" e Q9: "Os comentários que a professora fez no relatório ajudaram-me a perceber os pontos fortes e fracos do meu trabalho" estavam, de certa forma, relacionadas com a elaboração dos relatórios. As opiniões dominantes são concordantes, não se tendo verificado qualquer opinião discordante relativa à utilidade dos comentários da professora na melhoria dos mesmos.

A distribuição dos tempos lectivos pelas diferentes actividades realizadas na sala de aula foi, para mim, um aspecto difícil e de grande ponderação. Neste sentido, pretendi saber se os alunos concordavam com a distribuição feita. As opiniões em relação à questão Q6: " Houve uma adequada ponderação entre as aulas expositivas, de exercícios e de realização de tarefas" são predominantemente concordantes (54%), havendo 14 alunos (28%) que discordam. Este aspecto foi, no entanto, alvo de desgosto/crítica nalguns comentários às questões abertas e a necessidade de mais exercícios foi referida por 10 alunos (22%). Estas são algumas das suas afirmações:

Talvez existir uma componente mais prática, nomeadamente na realização de mais exercícios.

Podíamos, fazer mais exercícios.

Desgradou-me o tempo que tira das aulas necessárias para aprender a treinar com exercícios a matéria que sai no teste.

O facto de não termos feito exercícios quase nenhuns nas aulas sobre a matéria leccionada.

Foi uma ideia com algum sucesso, porém, a matéria deveria ter sido mais praticada.

Ter feito poucos exercícios.

Interessa-me também conhecer a opinião dos alunos sobre as tarefas de investigação, enquanto actividade inovadora dentro das várias actividades desenvolvidas nas aulas. Para tal analisei as opiniões dos alunos referentes a alguns parâmetros que considere abrangerem os diferentes aspectos considerados na realização de uma tarefa de investigação.

Os resultados relativos à questão Q2: “O tempo disponibilizado para a realização das tarefas foi suficiente” mostram que, a maioria dos alunos tem opinião concordante. Assim, 13 alunos (26%) discordaram total ou parcialmente, 11 (22%) não concordaram nem discordaram, 18 (36%) concordaram parcialmente e 8 (16%) concordaram totalmente. Apesar disso, este aspecto foi um dos referidos também nas questões abertas, por 12 alunos (26%), que sugerem um alargamento do tempo disponível para a realização da tarefa, embora essa necessidade se tenha feito sentir mais na elaboração dos relatórios. Reclamam por isso a ocupação de muito tempo extra-lectivo na escrita dos relatórios e propõem que estes sejam feitos na aula, como mostram os comentários seguintes:

Mais tempo para a realização das tarefas, porque por vezes é complicado acabar as tarefas fora das aulas devido a termos um horário bastante preenchido.

Alargar mais o período de realização da tarefa.

Mais tempo para a realização do relatório.

Substituir os relatórios apenas por discussão em grupo, reduzindo o tempo dispendido.

Adicionava mais tempo para a entrega do relatório para evitar as noites em claro.

No que respeita à Q3: “Os assuntos tratados nas tarefas são motivadores”, apenas 1 aluno discordou parcialmente, 11 alunos (22%) não concordaram nem discordaram e os restantes 38 alunos (76%) concordaram parcial ou totalmente.

Também nos registos das respostas abertas do questionário, encontrei comentários relativos à motivação desenvolvida pelos assuntos tratados nas tarefas:

As tarefas são bastante motivadoras, porque para além de nos ajudar a reflectir, ajuda-nos também a compreender a matéria estudada.

Para os alunos adquirirem os conhecimentos matemáticos é necessário que se sintam muito motivados e as tarefas de investigação fazem com que os alunos se motivem e tenham interesse em resolver tarefas.

As tarefas não se limitaram somente à matéria leccionada mas também apelavam à investigação de tudo o relacionado com a matemática.

Pela primeira vez vi a Matemática a ser aplicada às situações do nosso dia a dia, penso que isso é muito interessante, além de ser mais motivador.

Estimula e leva os alunos a pensar na matemática como uma ciência aplicável.

Parece ser consensual o facto das tarefas de investigação terem tido um papel importante na aprendizagem dos alunos. À questão Q5: “A realização das tarefas ajudou-me a compreender melhor os conteúdos programáticos da disciplina”, 27 alunos (54%) responderam que concordavam parcial ou totalmente, 11 (22%) não concordavam nem discordavam e dos 12 (24%) que discordaram, apenas 1 aluno o fez totalmente. Nos comentários dos alunos nas questões abertas, surgem várias justificações para a opinião favorável por eles demonstrada, relativa às actividades de investigação enquanto facilitadoras da aprendizagem:

Ajudam-nos a cimentar melhor os conhecimentos a aprender, pois de um modo menos formal e mais divertido conseguimos trabalhar melhor.

Foram uma ajuda muito boa a perceber a matéria, de onde é que os métodos vêm e aplicações para esses métodos.

É algo inovador e que com mais tempo de implementação deste sistema pode trazer grandes melhorias quanto à assimilação da matéria pelos alunos e a Matemática passa a ser uma cadeira mais dinâmica em que o professor não se limita apenas a despejar a matéria e os alunos a apanhá-la como se de um depósito se tratassem.

As tarefas são bastante motivadoras, porque para além de nos ajudar a reflectir, ajuda-nos também a compreender a matéria estudada.

Acredito que as tarefas me ajudaram a encarar a matemática de uma outra forma, adaptando-se ao dia a dia, permitindo assim uma melhor assimilação dos seus conteúdos.

Ajuda a melhor compreender a matéria pois é mais fácil compreendê-la se for aplicada em casos práticos.

Ajuda a compreender melhor a matéria. É uma boa maneira de entrar na matéria.

Facilitou a aprendizagem da matéria que posteriormente foi dada em aula.

Considerando os resultados anteriores, é de esperar opiniões positivas sobre a eficácia do trabalho desenvolvido na aprendizagem dos alunos. A análise das respostas à questão Q12: "O trabalho desenvolvido com a nova metodologia foi eficaz em termos da minha aprendizagem" revelou uma distribuição semelhante à anterior com 32 (64%) alunos concordantes, 4 (8%) sem opinião e 14 (28%) discordantes. Registaram-se ainda, nas questões abertas, comentários favoráveis do tipo:

No meu ver, acho que as tarefas foram uma mais valia no nosso método de estudo.

Acredito que esta metodologia de trabalho é boa e importante no estudo da Matemática.

É um processo de obrigar os alunos no raciocínio e disputa deste nas melhores soluções de resolução do problema o que concretiza o objectivo da Matemática no treino da agilidade mental, beneficiando bastante comparativamente aos processos de memorização de matéria.

As tarefas ajudam-nos a desenvolver a nossa capacidade intelectual pois faz-nos pensar como havemos de chegar à solução, antes de aprendermos como se chegava lá (antes da teoria).

Penso que nos ajuda a criar métodos de trabalho e estudo e a aprofundar conhecimentos.

Foi um método diferente, pouco usual no ensino actual. Mas através das tarefas os alunos são "obrigados" a estar ao corrente da matéria leccionada para a realização destas, o que foi benéfico para a aprendizagem da matéria.

Duas respostas revelaram algum descrédito em relação à metodologia adoptada mas sem dar justificação:

Acho que apesar de serem bastante interessantes não me ajudaram, enquanto aluno a perceber bem esta disciplina.

A realização das tarefas para o ensino desta disciplina cria um maior grau de dificuldade em termos de aprendizagem.

Um outro aspecto que considerei importante perceber foi se os alunos sentiram que a avaliação das tarefas contribuiu adequadamente para a classificação final do semestre. À questão Q11: “A forma de avaliação das tarefas de investigação foi adequada” apenas 4 alunos (8%) discordam parcialmente da adequação, 15 (30%) não concordam nem discordam e 32 (64%) concordaram com a avaliação feita.

No entanto, quando questionados sobre Q10: “Os relatórios realizados em grupo permitem à professora avaliar o meu trabalho nas tarefas”, as opiniões já se dividem mais entre os concordantes (46%), os que não têm opinião (24%) e os discordantes (30%). Este facto parece ter a ver com a dificuldade de comunicação escrita dos alunos, aliás assinalado nas questões abertas:

O que mais desagradou foi o facto de não conseguirmos escrever tudo o que pensamos e todo o nosso raciocínio.

[O que mais desagradou] Foi o facto de, por vezes até durante a realização da tarefa usarmos e justificarmos o que iamos fazendo, no relatório não o fazíamos por este ou outro motivo, éramos bastante prejudicados com isso.

[O que mais desagradou] O facto de às vezes o relatório não transmitir todo o trabalho realizado porque não sabemos escrever exactamente para transmitir tudo o que foi trabalhado.

[O que mais desagradou] Termos que entregar relatórios, mas é compreensível porque é método de avaliação.

Por vezes é complicado passar para o papel todos os raciocínios.

Já as apresentações orais foram actividades que os alunos poderiam considerar uma forma útil de avaliação. As respostas à questão Q7: “Na apresentação oral consigo explicar melhor o que fiz”, os resultados mostram que 37 alunos (74%) concordam com a afirmação, 10 (20%) não têm opinião formada e apenas 3 alunos (6%) discordam

parcialmente. O agrado em relação às apresentações orais e aos debates foi muito significativo, sobretudo nas questões abertas como já referi.

Das respostas fornecidas pelos alunos sobre os aspectos que consideraram mais e menos conseguidos nas aulas de Análise Numérica, podem retirar-se algumas tendências dominantes, além das que já foram referidas nas questões anteriores.

As opiniões favoráveis podem agrupar-se em função do tipo de justificação apontada pelos alunos. Para muitos alunos, as actividades realizadas constituíram um desafio e uma novidade. Para outros, os argumentos preponderantes têm a ver com as alterações verificadas no processo de ensino-aprendizagem e nas suas concepções da Matemática. São apresentadas como exemplos deste tipo de opiniões dos alunos, as transcrições seguintes:

A possibilidade de discutir Matemática que até agora era uma experiência nunca feita.

A realização destas tarefas permite-nos conhecer a matéria por nós próprios, descobrindo-a pela investigação.

Deu-nos outro ponto de vista da exploração e investigação na Matemática.

Foi o desafio lançado, e ter que raciocinar, ou melhor encontrar uma forma adequada para ultrapassar esse desafio, e é inspirador quando sentimos que conseguimos tirar resultados proveitosos.

As aulas incentivavam-nos à pesquisa, para podermos obter bons resultados.

Conhecer métodos novos de estudar e aprender matemática, através da investigação, por exemplo.

Agradou-me por este método ser deveras diferente.

Agradou-me ter a oportunidade de explorar e aplicar métodos matemáticos "criados" pelo grupo em casos práticos.

É positivo, pois mostra-nos outra visão da matemática, uma visão mais prática.

A disciplina de Análise Numérica dá aos alunos uma ideia um pouco diferente daquela que cada um tem da Matemática em geral o que é bom, também estimula o raciocínio dos alunos, evitando assim que mecanizem as coisas, e no futuro quando são deparados com uma

situação nova não sabem como se "livrarem" dela. Foi positiva a experiência.

Estar a fazer pesquisa e investigação é extremamente interessante.

As opiniões negativas prendem-se maioritariamente com as mudanças provocadas pelas tarefas de investigação, nos hábitos de trabalho adquiridos ao longo da escolaridade dos alunos, às quais têm alguma dificuldade de adaptação. Estas opiniões traduzem-se nas seguintes propostas de alteração, formuladas pelos alunos:

A matéria que vai ser aplicada na tarefa deveria ser exposta (não toda) antes da realização da tarefa para os alunos terem algumas bases.

Desagradou-me o facto de não existir uma primeira abordagem da matéria (muito breve) e depois só aplicá-la nas tarefas. Penso que seria mais proveitoso.

Talvez existir uma componente mais prática, nomeadamente na realização de mais exercícios.

Sobretudo gostava que nos fossem fornecidos mais exercícios e as soluções.

Síntese de resultados

Uma breve síntese dos resultados descritos e discutidos neste capítulo evidenciam uma satisfação generalizada dos alunos face à metodologia de ensino-aprendizagem utilizada. A maioria dos alunos destaca as actividades de investigação como um dos aspectos positivos da experiência. São várias as razões que justificam estas impressões positivas: motivação, promoção de raciocínio e aprendizagens e trabalho com pares.

Além disso, as actividades investigativas propostas foram consideradas realistas e os alunos valorizaram o facto de permitirem aplicar conhecimentos em situações concretas do quotidiano. Permitiram ainda um alargamento e aprofundamento de conhecimentos contribuindo para uma maior compreensão e capacidade de enfrentar problemas, tornando-se um meio facilitador da aprendizagem. Por outro lado, representaram uma mudança em relação ao tipo de trabalho que consideram habitual nas aulas de Matemática, tendo os alunos expressado particular agrado pelos debates e as

discussões que o trabalho em grupo proporcionou. No entanto, talvez o mais significativo seja o modo como os alunos sentiram que as actividades os levaram a pensar de outra maneira, a raciocinar e a descobrir uma outra dimensão da Matemática.

A escassez de tempo foi um dos principais obstáculos sentidos pelos alunos, sobretudo na elaboração dos relatórios. As respostas mais negativas não discutiram a metodologia utilizada mas exprimem preferência pelas aulas tradicionais onde a resolução de exercícios é prática corrente, considerando que estas últimas poderão ter melhores efeitos na aprendizagem. Este é, aliás, o único aspecto referido pelos alunos, nos seus depoimentos, que gostariam de ver alterado. Outra corrente que surgiu nas opiniões negativas registadas, prende-se com o desagrado da avaliação dos relatórios contribuir para a sua classificação final, dadas as muitas dificuldades que eles apresentam na sua produção.

Pode-se assim afirmar que, no geral, as actividades de investigação tiveram algum impacto nos alunos e influenciaram significativamente a aprendizagem dos tópicos de Análise Numérica.

CAPÍTULO 8

Conclusões e Recomendações

Conclusões do estudo

O processo de inovação pedagógica posto em prática no presente estudo é suportado pela realização de actividades de investigação e tem como objectivo compreender os processos matemáticos utilizados pelos alunos na resolução deste tipo de actividades. Em particular, tentei perceber as características da actividade de investigação desenvolvida pelos alunos e as potencialidades deste tipo de actividade na promoção das suas aprendizagens.

As tarefas de investigação que propus aos alunos foram concebidas de modo a constituírem oportunidades para desenvolverem um maior conhecimento relativo aos processos matemáticos envolvidos na actividade de investigação e, ao mesmo tempo, representam contextos para abordar os tópicos do programa de Análise Numérica. Tratando-se de uma investigação baseada em estudo de casos, as conclusões que apresento não são generalizáveis para outros contextos. No entanto, sugerem um conjunto de hipóteses de trabalho que poderão ajudar a corrigir falhas e introduzir melhoramentos nas actividades de investigação e/ou orientar a aplicação desta metodologia a outras situações.

Os resultados obtidos ao longo das diversas fases deste estudo foram apresentadas e discutidas nos capítulos anteriores. Neste capítulo apresento as conclusões finais do estudo, tendo em consideração os objectivos e as questões de investigação enunciadas, articuladas com a revisão da literatura realizada.

Processos matemáticos utilizados pelos alunos

As conclusões retiradas ao nível dos processos matemáticos utilizados pelos alunos na realização de tarefas de investigação na sala de aula advêm, sobretudo, do estudo de casos relativos aos dois grupos analisados. A realização de tarefas de

investigação por parte dos alunos possibilitou a utilização de vários processos característicos da actividade matemática. No entanto, constata-se que a presença dos vários processos matemáticos a que este estudo pretende dar relevância não foi igual em todas as tarefas propostas, e que a sua utilização não é feita de igual modo pelos alunos.

Os dois grupos analisados tiveram sempre a preocupação de fazer registos escritos das suas explorações através da elaboração de listagens, esquemas e gráficos. Embora, no início os alunos não revelassem competência em organizar registos significativos e sistemáticos das suas descobertas, os processos de *registo e organização dos dados* estiveram presentes em todas as tarefas e a sua evolução fez-se gradualmente.

Para alguns autores (e. g., Ernest, 1996; Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas, 1998), a *formulação de questões* produtivas e interessantes é uma etapa importante numa investigação matemática. Os dados recolhidos sugerem que a actividade de investigação dos alunos não contempla formalmente, esta etapa. Após o início das tarefas, emergiam as primeiras conjecturas, já sob a forma de afirmações. Para os alunos, é mais natural formularem afirmações e confirmá-las ou refutá-las com o trabalho posterior. Esta dificuldade demonstrada pelos alunos na formulação de questões é também referida noutras investigações (Brocardo, 2001; Ponte e Matos, 1996).

A *formulação de conjecturas* foi um processo frequentemente utilizado pelos alunos, em todas as tarefas, embora com ênfase diferente. Verificou-se também que este processo teve uma maior presença nas tarefas em que os alunos recorreram a um maior número de exemplos particulares, depreendendo-se então uma forte relação entre os processos de especialização e formulação de conjecturas. Este facto é também apresentado por Mason, Burton e Stacey (1982). A ideia que os alunos têm, de que uma tarefa matemática implica a procura de respostas/conclusões, levou-os, numa fase inicial, a formularem conjecturas, implicitamente, considerando-as conclusões após um número reduzido de testes. Foi também visível, numa fase posterior, a necessidade de formular um grande número de conjecturas/conclusões, independentemente da sua trivialidade. Só com o trabalho continuado em torno da exploração de tarefas de investigação e, em particular com as discussões em grande grupo, é que os vários alunos compreenderam o estatuto de uma conjectura. Estas características do trabalho dos alunos foram observadas também por Ponte *et al.* (1998). Estes autores referem uma tendência dos alunos para considerarem uma conjectura como uma conclusão e o facto

de alguns deles parecerem sentir uma certa pressão no sentido de formular o maior número possível de conjecturas/conclusões independentemente da sua trivialidade.

Depois de formulada uma conjectura ela tem de ser submetida a sucessivos testes. O *teste de conjecturas* integrou todas as tarefas e foi utilizado pelos dois grupos estudados. Foi realizado, na maioria das vezes, através da experimentação e da geração de mais exemplos, indiciando, desta forma, uma estreita relação, já referida, entre este processo e o de especialização. Relativamente ao teste de conjecturas não se observaram particulares dificuldades dos alunos. As dificuldades sentidas nesta fase estavam relacionadas com as decisões sobre o número e o tipo de casos a estudar. Foi também neste processo de verificação que o uso da máquina de calcular foi mais notório, ajudando a formular e a testar hipóteses mais rapidamente e em maior número.

Segundo Ponte *et al.* (1998), a não validação de uma conjectura deve implicar uma tentativa de a reformular. Este processo de *refinamento de conjecturas* não foi uma preocupação da generalidade dos alunos, embora o grupo B estudado o tenha utilizado diversas vezes nas suas explorações.

Mason, Burton e Stacey (1982) defendem que a especialização se utiliza para obter a evidência com base na qual poderá ser feita depois uma *generalização*. O processo de *especialização*, apesar de nem sempre presente, foi ainda assim bastante utilizado pelos alunos nas várias fases da sua investigação. Inicialmente, este processo revelou-se fundamental para apoiar a formulação de conjecturas, pois estas surgiam após a geração de exemplos particulares. Numa fase posterior, os alunos utilizaram-no para testar essas mesmas conjecturas. No entanto, a especialização foi quase sempre utilizada seguindo uma lógica mais errática do que sistemática, dificultando a *procura de regularidades*, processo pouco presente no trabalho dos alunos. A ausência de sistematização e o carácter pouco organizado da especialização realizada pelos alunos, dificultaram também a generalização de procedimentos, que se mostrou muitas vezes incompleta ou mesmo ausente nas várias tarefas.

A falta de hábito em procurar justificações, aliada a uma certa falta de conhecimentos, contribuiu para que o processo de *justificação de conjecturas* não esteja contemplado ao longo do trabalho dos alunos. Para o grupo A é um aspecto que acaba por não ser contemplado no seu trabalho pois não costuma pensar muito nele ou não sabe muito bem como fazê-lo. Embora o grupo B tenha mostrado grande dedicação na procura de justificações para as conjecturas formuladas nalgumas tarefas, na maior parte das situações estas não surgiram espontaneamente da actividade dos alunos mas quando

solicitada pela professora. Estas justificações surgiram, sobretudo, durante a discussão das tarefas em grupo, com base na intervenção questionadora da professora e recorrendo, quase sempre, à demonstração visual do que pretendiam defender. Nalguns casos, sobretudo nas últimas tarefas, surgiram esboços de tentativas de justificação nos relatórios escritos, realizados em tempo extra-lectivo, onde os alunos tinham mais tempo para pensarem no seu trabalho.

A *demonstração* de conjecturas que resistiram a sucessivos testes, constitui a fase final da actividade de investigação. No trabalho dos alunos, este processo teve uma presença ainda mais fraca do que a justificação. Numa fase inicial os alunos não sentiram necessidade de provar uma conjectura que lhes parecia verdadeira e que tinha resistido a sucessivos testes. À medida que iam adquirindo experiência na exploração de tarefas de investigação esta atitude inicial foi-se alterando, passando a reconhecer a importância e significado de provar as suas conjecturas. Nas últimas tarefas, a grande maioria dos alunos tinha a clara noção de que deveria pensar na prova das suas conjecturas antes de dar por concluído o seu trabalho mas só o tentavam fazer quando tal era explicitamente pedido pela professora nas aulas de discussão das tarefas. Para isto poderá ter contribuído, o facto de, em algumas tarefas, a demonstração de conjecturas que pareciam verdadeiras não ser acessível aos alunos, dificultando assim a interiorização desta fase da investigação. No entanto, como referido, os alunos conseguiram evoluir passando a reconhecer a importância e significado de provar as suas conjecturas.

Resumindo as conclusões retiradas ao nível dos processos matemáticos utilizados pelos alunos na exploração de investigações matemáticas, pode dizer-se que os dois grupos envolvidos neste estudo utilizaram de modo semelhante os processos de procura de regularidades, formulação e teste de conjecturas, especialização e generalização. Destes processos, a especialização e a formulação e teste de conjecturas foram aqueles que surgiram mais automática e frequentemente durante a actividade dos alunos. Já o uso dos processos de justificação e demonstração tiveram algumas características distintas e a sua presença no trabalho investigativo foi muito reduzida, surgindo poucas vezes espontaneamente. Evidencia-se também o facto de, ao longo da experiência, todos os alunos terem gradualmente tomado conhecimento dos vários processos matemáticos de que se podem servir para progredir na exploração das tarefas propostas.

Aprendizagens desenvolvidas pelos alunos

Depois desta experiência com que pretendi desenvolver metodologias e acções capazes de promover a aprendizagem dos alunos envolvidos, importa reflectir e verificar a sua efectividade. A exploração das tarefas propostas permitiu a abordagem de diversos temas programáticos e serviu para focar determinados conceitos. Estes conceitos foram, frequentemente, construídos pelos alunos que desempenharam assim, um papel activo no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina. Os dados mostraram também que se verificaram aprendizagens significativas, ao nível do conhecimento, dos conteúdos programáticos da Análise Numérica. O grande empenho e o esforço desenvolvido, por parte dos alunos, parecem ter contribuído para uma melhor compreensão dos assuntos com que trabalham.

A aquisição de conhecimentos ligados aos tópicos programáticos abordados não me parece ter esgotado o processo de aprendizagem dos alunos. Apesar de não ser visível uma grande evolução no desempenho do grupo ao nível dos processos matemáticos por eles usado ao longo do semestre, em particular a justificação e a demonstração, a realização destas tarefas desenvolveu, nos alunos, um espírito investigativo e a compreensão dos processos por eles vividos. A capacidade de comunicação e o espírito crítico foram também alguns aspectos referidos pelos alunos como fazendo parte do que consideram ser aprendizagens significativas. Confirma-se, desta forma, a potencialidade das investigações para desenvolverem e facilitarem a aprendizagem.

Factores que influenciaram os processos e as aprendizagens

O desempenho dos alunos nas várias tarefas realizadas teve características diferentes e parece ter sido influenciado por diversos factores. Entre eles, destaco a natureza da tarefa, a utilização da máquina de calcular, o trabalho de grupo e a atitude da professora. A influência destes factores não foi uniforme ao longo do trabalho realizado, no entanto, todos eles contribuíram de algum modo para a utilização ou não de determinados processos pelos alunos e para a sua própria aprendizagem.

A *natureza da tarefa* revelou ter alguma influência sobre os processos utilizados pelos alunos. O facto das tarefas serem mais ou menos estruturadas e de abordarem situações da realidade, pode ter contribuído para um maior ou menor uso de

determinados processos. Habitualmente considera-se que propor tarefas de investigação mais estruturadas tenderá a conduzir os alunos e a condicionar-lhes a investigação. Neste estudo, a última tarefa, cuja natureza era mais aberta, foi aquela em que os alunos se sentiram mais perdidos e a que desencadeou o uso de um menor número de processos. Constatou-se até, que os enunciados mais estruturados constituíram uma ajuda aos alunos pouco habituados a realizar trabalho investigativo, contribuíram para o aparecimento de novas e variadas ideias e permitiram aos alunos ir mais longe nas suas investigações. Com base nas quatro tarefas de investigação propostas, pode ainda assinalar-se que o facto dos temas abordados serem situações da realidade, com as quais os alunos estavam familiarizados, resultou em efeitos contrários. Por um lado, foi referido pelos alunos como um factor positivo e do seu agrado. Por outro, pode condicionar o trabalho, sobretudo a exploração de casos, que tendem a limitar ao que consideram ser realístico.

Ao nível das tarefas, outro factor que me pareceu favorecer a utilização dos processos matemáticos e a aprendizagem da Análise Numérica foi a sequência de conteúdos programáticos nelas abordados. Segundo Mason, Burton e Stacey (1982), uma analogia entre o que está a ser estudado e uma outra situação anteriormente investigada pode ser útil para sugerir modos de abordagem. Nas últimas tarefas os alunos beneficiaram do trabalho realizado e das matérias entretanto abordadas, reforçando deste modo as suas aprendizagens.

A máquina de calcular gráfica, utilizada pelos alunos na exploração das tarefas de investigação ajudou a realização de cálculos e a construção de gráficos, de forma rápida, permitindo gerar um grande número de exemplos num curto espaço de tempo. Desta forma, a máquina de calcular constituiu um auxiliar precioso na utilização de alguns processos favorecendo, sobretudo, a especialização, a formulação de conjecturas e a sua verificação. Parece então legítimo concluir que a realização de tarefas investigativas que permitam a utilização da máquina de calcular contribui para promover nos alunos o uso de determinados processos característicos da actividade matemática. Este facto vai de encontro ao que é defendido por Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997) quando referem que a apresentação de tarefas estimulantes baseadas no trabalho com a calculadora e o computador ajudam os alunos a desenvolver uma atitude investigativa.

No seu estudo, Fonseca (2000) conclui que a *atitude da professora* e o modo como orienta as actividades de investigação pode influenciar a postura investigativa dos

alunos. Tentei por isso orientar os alunos no trabalho, de uma forma discreta, através de uma postura evasiva e interrogativa, devolvendo questões que os levou a reflectir sobre as suas próprias dúvidas. As orientações foram dadas no sentido de incentivar os alunos a realizar novas especializações, a melhorar a formulação de conjecturas e, sobretudo, a utilizar a justificação e nalguns casos a demonstração. Desta forma, a minha influência poderá ter contribuído para a autonomia progressiva dos alunos e para uma melhoria ao nível da compreensão e utilização dos processos matemáticos característicos da actividade matemática.

O *trabalho de grupo* foi reconhecido, não só pelos dois grupos em análise mas pela generalidade dos alunos, como muito significativo para a aprendizagem, tendo favorecido o trabalho investigativo. A discussão entre os elementos do grupo conduziu, várias vezes, ao surgimento de variadas abordagens, a melhorias na formulação de conjecturas e ao aumento do seu número e até à justificação das mesmas. Verificou-se ainda que o trabalho de grupo motivou os alunos, ajudou a estabelecer um ambiente em que os alunos participaram activamente e facilitou a compreensão do que é a actividade matemática.

As *aulas de discussão* em grande grupo não se reduziram à apresentação dos resultados dos trabalhos mas revelaram-se fundamentais para a continuação da investigação e para aprofundar o conhecimento dos processos matemáticos envolvidos numa investigação. A interacção com os colegas favoreceu a realização de novas descobertas mostrando-lhes outras abordagens e obrigou-os a analisar as suas ideias e a justificá-las, quando questionados sobre elas. O incentivo da professora e os seus desafios permitiram ainda mobilizar e desenvolver o seu conhecimento matemático.

Dificuldades dos alunos na realização de actividades de investigação

Independentemente do seu grau de estruturação, uma tarefa investigativa é menos orientada que as actividades habitualmente realizadas pelos alunos. Dada a falta de hábito dos alunos em realizar trabalho de natureza investigativa na sala de aula, é natural que tenham experimentado, inicialmente, uma certa insegurança e desorientação perante as características deste tipo de actividade.

A interpretação do enunciado (saber o que é para fazer) e, conseqüentemente, a falta de autonomia em relação à professora parecem ter sido as principais dificuldades sentidas pelos alunos. Estes, em geral, começaram por demonstrar uma grande

necessidade de apoio, procurando obter da professora informações concretas quanto ao que fazer. Esta necessidade foi diminuindo à medida que os alunos se familiarizaram com este tipo de propostas, tornando-se até bastante autónomos a partir da segunda tarefa.

Foram ainda identificadas grandes dificuldades associadas ao registo escrito das suas descobertas, um aspecto onde também foi visível a falta de experiência dos alunos na sua elaboração. Os alunos evidenciaram dificuldades em iniciar a elaboração do relatório da primeira tarefa, apesar das indicações e sugestões que lhes disponibilizei em forma de guião. Os relatórios produzidos inicialmente valorizavam sobretudo os produtos relativamente aos processos, reduzindo-se a uma enumeração das descobertas feitas, sem explicações das mesmas e sem apresentar quaisquer justificações. Estes relatórios foram evoluindo, em parte devido à compreensão que os alunos iam adquirindo dos processos associados a esta actividade, mas também com o auxílio dos comentários feitos pela professora. No entanto, os alunos evidenciaram sempre uma grande dificuldade na expressão escrita.

Impacto das actividades de investigação nas concepções dos alunos

A implementação das actividades de investigação como metodologia de ensino-aprendizagem foi do agrado da generalidade dos alunos e parece ser consensual o facto de terem tido um papel importante na mudança das suas posturas e atitudes face à Matemática.

A grande maioria dos alunos reconhece o desenvolvimento do raciocínio como principal objectivo das disciplinas de Matemática, independentemente da metodologia utilizada. No entanto, passaram a reconhecer a aplicação e a utilidade prática dos conteúdos da Análise Numérica em situações da vida quotidiana. Passaram também a considerar diferentes abordagens aos problemas propostos e a reconhecer a existência de mais do que uma resposta 'certa'.

Os novos hábitos de trabalho e de estudo experimentados alteraram ainda a visão da Matemática enquanto actividade solitária. As discussões suscitadas pela realização de tarefas de investigação, quer entre os elementos dos grupos, quer com toda a turma, revelaram-se do agrado dos alunos. As suas opiniões reflectem uma modificação, após as actividades investigativas, no sentido de considerarem importante a partilha de informação entre colegas.

Já as concepções relativas aos papéis do professor e do aluno, no processo de ensino-aprendizagem, parece não ter sido alterado pelas actividades realizadas. Os alunos, têm concepções muito enraizadas sobre o seu papel de 'receber conhecimentos e demonstrar que os adquiriu' e do papel do professor de 'transmitir conhecimentos e verificar se os alunos os adquiriram'. Nestes papéis, o factor que sobressai para os alunos e determina as suas opiniões é o da avaliação. Apesar da metodologia de ensino-aprendizagem ser diferente, os alunos continuam a estar sujeitos a uma avaliação, não lhes permitindo, por isso, vislumbrar alterações nos papéis de professor e aluno.

Os dados obtidos, maioritariamente por questionário, confirmam que houve mudanças significativas na opinião dos alunos relativamente à Matemática. As mudanças no ambiente de trabalho e nas experiências vividas pelos alunos despoletaram também neles uma postura diferente. Parece-me, no entanto, não ter dados suficientes para afirmar que foram as concepções dos alunos que mudaram e/ou que foram as actividades de investigação que influenciaram essas alterações.

Recomendações e propostas de trabalho futuro

O trabalho desenvolvido neste estudo evidenciou as potencialidades das actividades de investigação no processo de ensino-aprendizagem dos alunos e a possibilidade da sua integração na sala de aula. Os resultados sugerem algumas reflexões e recomendações, quer ao nível da prática lectiva, para os professores interessados em proporcionar aos seus alunos este tipo de experiência e em fomentar o uso de determinados processos característicos da actividade matemática, quer para a própria investigação neste domínio.

Para a prática lectiva

Os resultados obtidos nesta experiência pedagógica, conduzem a uma avaliação positiva do papel que poderão desempenhar as actividades de investigação na aprendizagem dos alunos, nomeadamente no domínio da Análise Numérica. No entanto, alguns aspectos devem ser aferidos de forma a introduzir melhoramentos.

Em relação às actividades propostas, saliento a necessidade de algum cuidado na elaboração e/ou selecção das tarefas. Estas devem ser suficientemente ricas para permitirem explorações e investigações que conduzam os alunos a desenvolver

capacidades de raciocínio, a aumentar ou reorganizar os seus conhecimentos e a uma verdadeira compreensão de novos conceitos. O seu grau de estruturação pode ser variável uma vez que os dados confirmam que uma maior estruturação não implica uma menor investigação, podendo até, em certas condições, desencadear um aprofundamento do trabalho. É de considerar, por isso, a utilização de actividades mais estruturadas, numa fase inicial, em que se pretende familiarizar os alunos com o tipo de estratégias e procedimentos inerentes às actividades de investigação, para, numa fase posterior, apresentar actividades mais abertas. Uma vez criadas, é ainda de considerar possíveis alterações às tarefas, de forma a adaptá-las em função do tempo disponível para a sua realização, dos conceitos ou conteúdos programáticos que se pretende abordar e dos processos matemáticos cuja utilização se pretende fomentar.

Outro aspecto que destaco é a atenção que o professor deve dar à orientação da actividade de investigação. Os alunos, de forma geral, têm a ideia pré-concebida de que uma tarefa matemática implica a procura de respostas ou conclusões. A evolução para uma postura realmente investigativa é um processo demorado e deve ser objecto de um trabalho sistemático por parte do professor, voltado para a promoção de certos processos matemáticos menos considerados pelos alunos. Para isso é necessário proporcionar aos alunos um contacto mais frequente com este tipo de actividades, onde experimentem vários processos de resolução não normativos e encontrem várias soluções igualmente correctas, onde a discussão em grupo é promovida e pode ser altamente proveitosa e onde a calculadora pode desempenhar um papel para lá do mero instrumento de cálculo.

As discussões finais das tarefas, em grande grupo, revelaram-se momentos cruciais para o trabalho investigativo dos alunos. Mais do que apresentar resultados, estes momentos deverão servir para desafiar os alunos a prolongar a investigação. Este aspecto poderá ter como resultado uma maior integração entre as actividades de investigação e as restantes aulas, além de promover um maior intercâmbio de diferentes perspectivas de resolução e o desenvolvimento, nos alunos, da compreensão dos processos característicos associados à actividade matemática.

Os relatórios de investigação são igualmente uma componente importante do trabalho investigativo a ter em conta pelo professor. Pedir aos alunos que expliquem como pensaram ou como fizeram pode constituir uma tarefa exigente. No entanto, os alunos vão progressivamente ultrapassando as dificuldades encontradas na verbalização dos processos de resolução e/ou de raciocínio, através do empenhamento e interesse

manifestado na elaboração dos seus relatórios. A julgar pela qualidade dos relatórios apresentados, parece-me que a sua realização em tempo extra-lectivo poderá ser benéfica, pelo facto dos alunos terem mais tempo para pensar na sua investigação e, por isso, bastante positiva no seu processo de aprendizagem. Também parece ter sido bem sucedido o guião proposto aos alunos com algumas indicações simples de esquemas de trabalho e pequenas sugestões para a construção dos seus relatórios. Os alunos manifestaram apreço referindo-os como um factor que contribuiu para a escrita, apresentação e organização dos seus trabalhos. Ainda sobre este aspecto, a presente experiência não contemplou a realização de trabalho investigativo individual. No entanto, penso que será de equacionar este aspecto pois apesar do trabalho de grupo influenciar positivamente a investigação dos alunos, o trabalho individual poderá trazer uma grande riqueza ao seu desempenho.

Os relatórios escritos podem constituir também, importantes elementos de avaliação ao fornecerem informações, quer ao professor, quer aos alunos através dos comentários escritos deste, sobre os resultados da aprendizagem destes no decurso das actividades realizadas.

Para a investigação

A introdução de uma metodologia de ensino com carácter inovador, deverá ser acompanhada de processos de investigação que permitam analisar e avaliar os diferentes factores envolvidos. A experiência desenvolvida centrou-se em alguns processos matemáticos utilizados por alunos do 2.º ano do ensino superior, quando realizam tarefas de investigação nas aulas de Análise Numérica. Uma investigação durante um período de tempo mais prolongado, em torno da mesma temática que foi estudada neste trabalho, poderia ajudar a aprofundar o conhecimento das dificuldades que a implementação das actividades de investigação ocasionam e a compreender melhor a evolução dos alunos, nomeadamente ao nível da utilização de processos pouco contemplados no tratamento de temas programáticos ou que precisem de mais tempo para serem por eles interiorizados.

A literatura é rica em reflexões que podem orientar os professores na realização de actividades investigativas na sala de aula. A constituição de uma colecção significativa de estudos de caso, correspondendo a uma diversidade de experiências desta natureza, poderá revestir-se de uma importância fundamental para o avanço do

conhecimento nesta área e proporcionar um quadro orientador da inovação das práticas pedagógicas. De acordo com os resultados obtidos, estas investigações poderão beneficiar se, por exemplo, as metodologias dos estudos incluírem diferentes métodos de recolha de dados. No presente estudo, não me propus discutir com os próprios alunos o seu desempenho. Este procedimento, feito sistematicamente no final de cada tarefa realizada, poderia ter enriquecido os dados de forma a possibilitar alguma reestruturação das actividades, ainda no período da sua implementação. Parece-me, no entanto, que a minha presença na aula, também como investigadora, observando os processos desenvolvidos pelos alunos, foi determinante nessa tarefa e na compreensão da evolução dos seus raciocínios. A experiência realizada confirmou também a necessidade de organizar um conjunto de tarefas disponíveis e avaliadas para poderem ser utilizadas e/ou adaptadas pelos docentes de forma a responder às suas solicitações. As tarefas apresentadas neste trabalho foram por mim elaboradas com o propósito de serem utilizadas numa disciplina e com alunos específicos. Penso que seria interessante aplicá-las a outros alunos de forma a obter uma base de informação mais alargada para a sua avaliação.

Atendendo ao carácter inovador das actividades de investigação, é fundamental que a estratégia de avaliação da aprendizagem seja pensada e construída de forma a avaliar as aptidões que se pretendem promover. Também aqui seria de obter uma base de informação mais alargada.

Finalmente, há também que ter em conta que quatro tarefas de investigação são necessariamente insuficientes para a adaptação à metodologia e para se poderem verificar ganhos consistentes no desempenho dos alunos no que se relaciona com o conhecimento, raciocínio e comunicação. A incidência de trabalho futuro deverá ser no sentido de compreender até onde pode ir o valor deste tipo de propostas na geração de conhecimento e de uma verdadeira actividade matemática na sala de aula. São por isso de estimular as experiências de inovação curricular que impliquem actividades desta natureza e que permitam ajuizar das suas potencialidades no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Reflexão final

O processo de integração de actividades de investigação nas aulas de Análise Numérica é complexo e pautado por dificuldades quer para os alunos, quer para a professora. Apesar disso, parece possível e desejável que seja implementado.

Os alunos participantes neste estudo têm, ao longo do seu percurso escolar, contactado predominantemente com o método expositivo e com um ensino centrado no professor. A mudança de papéis inerentes às actividades de investigação foi uma novidade a que tiveram que se adaptar. A perpetuação dos hábitos instalados ao longo de um percurso escolar onde as estratégias educacionais são centradas nos conteúdos e as limitações de tempo impostas por um currículo escolar muito preenchido, foram as principais dificuldades manifestadas por estes alunos relativamente à nova metodologia de ensino. Apesar de terem revelado dificuldades, os alunos empenharam-se muito e demonstraram um elevado nível de satisfação, referindo vantagens ao nível da motivação, da promoção do raciocínio e da aprendizagem.

O papel do docente também é muito diferente do que é desempenhado nos currículos tradicionais, uma vez que deverá tornar-se um facilitador da aprendizagem. A minha inexperiência na utilização de actividades de investigação, como metodologia, constituiu um factor de dificuldade na organização do ensino desta disciplina. A literatura disponível sobre as actividades de investigação no ensino superior e, em particular, na disciplina de Análise Numérica, também não foi suficiente para me preparar para uma tarefa tão exigente e complexa. Saliento, sobretudo, as incertezas e as tensões em relação às tarefas que criei, propus e orientei na sala de aula. Não é tarefa fácil pensar e criar as diferentes tarefas e fazer, em tempo útil, as necessárias adaptações como resultado de reflexões individuais, num processo de regulação das aprendizagens. Também não é possível prever todos os caminhos que os alunos vão percorrer, se vão ser produtivos e quais as dificuldades que vão encontrar. É difícil decidir quando e como intervir sempre que surge uma solicitação dos alunos ou uma situação de impasse. É ainda muito desconfortável e pouco usual sentir-me numa posição de não saber todas as respostas. Por tudo isto, sinto que um intercâmbio entre colegas teria sido uma forma profícua de traçar caminhos e soluções e essencial no desenvolvimento e evolução desta experiência que, apesar de tudo, foi muito significativa e revelou-se uma excelente oportunidade para aprender. Mas a experiência adquire-se experimentando e reflectindo.

Finalmente, a análise dos resultados positivos desta experiência e a reflexão sobre as limitações constatadas, apontam para que os conteúdos programáticos da Análise Numérica possam ser abordados por um conjunto de tarefas de investigação e para que seja possível despertar nos alunos o gosto por desenvolver um trabalho investigativo. Continuarei a analisar este processo e os seus efeitos nos alunos, para obter dados que permitam a progressiva integração deste tipo de actividades nas aulas desta disciplina. As aulas teóricas, se bem preparadas e entusiásticas podem proporcionar verdadeiros momentos de aprendizagem mas as exigências actuais da formação e as novas competências que se espera de um futuro profissional, não são contempladas nas metodologias eminentemente transmissivas. As actividades de investigação podem contribuir com muito mais.

Referências

- Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, 8, 7-10 e 35.
- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projecto MAT₇₈₉*. Lisboa: APM.
- Ahern-Rindell, A. (1999). Applying inquiry-based and cooperative group learning strategies to promote critical thinking. *Journal of College Science Teaching*, 28(3), 203-207.
- Araújo, J. (2004). Matemática para Geografia: reflexões sobre uma experiência. In H. N. Cury (Org.). *Disciplinas matemáticas em cursos superiores: Reflexões, relatos, propostas* (pp. 85-109). Porto Alegre: EDIPUCRS.
- Associação de Professores de Matemática (1996). A natureza e organização das actividades de aprendizagem e o novo papel do professor. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 51-60). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.
- Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.
- Barbosa, J. (2004). Modelagem matemática em cursos para não matemáticos. In H. N. Cury (Orgs.). *Disciplinas matemáticas em cursos superiores: Reflexões, relatos, propostas* (pp. 63-83). Porto Alegre: EDIPUCRS.
- Bireaud, A. (1995). *Os métodos pedagógicos no ensino superior*. Porto: Porto Editora.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.
- Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-24). Lisboa: SEM-SPCE.
- Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: Um projecto curricular no 8.º ano* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).
- Brunheira, L. (2000). *O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 1, 35-49.
- Burton, L. (1995). Moving a feminist epistemology of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 28, 275-291.
- Burton, L. (1999). The practices of mathematicians: what do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 37, 121-143.

- Cannell, C. F. & Kahn, R. L. (1968). Interviewing. In Lindzey, G. & Aronson, A. (eds). *The Handbook of Social Psychology*, vol. 2, Research Methods. New York, NY: Addison Wesley.
- Carpenter, T. P., Frank, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- Cohen, L. & Manion, L. (1994). *Research methods in Education*. London: Routledge.
- Conboy, J., Fonseca, J., & Gama, P. (2002). Abordagens construtivistas no ensino superior. In M. O. Valente, J. P. Ponte, M. F. Sanches (Orgs.), *Itinerários 2002: Investigar em educação* (pp. 371-378). Lisboa: CIE.
- Cury, H. N. (2004). *Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores. Reflexões, Relatos, Propostas*. Porto Alegre: EDIPUCRS.
- Davis, P. J. & Hersh, R. (1985). *A experiência Matemática*. Rio de Janeiro: F. Alves.
- Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalsi, M. (1994). The teaching of Linear Algebra in first year of French Science University : epistemological difficulties, use of 'meta lever', long term organization. *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 1, 137-144.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education: Studies in mathematics education*. London: Falmer Press.
- Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 25-48). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.
- Fonseca, H. (2000). Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- Fonseca, H., Brunheira L. & Ponte, J. P. (1999). As actividades investigativas, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat 99* (pp. 91-101). Lisboa: APM.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.
- Frobisher (1994). Problems, investigations and an investigative approach. In Orton & G. Waim (Eds.), *Issues in teaching mathematics* (pp. 150-173). London: Cassel.
- Frota, M. C. R. (2001). Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo do cálculo. In J. B. Landares & J. Lachini (Eds.). *Educação Matemática: A prática educativa sob o olhar dos professores de cálculo* (pp. 89-122). Belo Horizonte: FUMARC.
- Gerald, C. F. & Wheatley, P. O. (1994). *Applied Numerical Analysis*. Addison-Wesley.
- Goetz, J. & LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. San Diego, CA: Academic Press.
- Goldenberg, E. P. (1998). "Hábitos de pensamento": Um princípio organizador para o currículo (I). *Educação e Matemática*, 47, 31-44.

- Goldenberg, E. P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.
- Hadamard, J. (1945). *Psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Hatch G. (1995). If not investigations - what? *Mathematics Teaching*, 151, 36-39.
- Kilpatrick, J. (2005). A critique of impure unreason. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas*. Lisboa: APM.
- Kilpatrick, J. Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Lamas, E. P. R. & Cardeano, N. (2003). A didáctica no ensino superior – que identidade? Qual o papel desempenhado? In A. Neto, J. Nico, J. C. Chouriço, P. Costam & P. Mendes (Orgs.), *Didácticas e Metodologias de Educação* (pp. 383-389). Évora: Departamento Pedagogia e Educação da Universidade de Évora.
- Ludke, M. & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
- Malonek, H., Carvalho e Silva, J. & Costa, T. (2002). Alunos/investigadores no ensino superior no século XIX. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 169-181). Lisboa: SEM-SPCE.
- Mason, J. (1996). O “quê”, o “porquê” e o “como” em Matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 15-23). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Bristol: Addison-Wesley.
- Matos, J. F. & Carreira, S. (1994). Estudos de caso em Educação Matemática – Problemas actuais. *Quadrante*, 3, 1, 19-53.
- Mello, M. P. & Santos, S. A. (2002). Mancha negra: reflexões sobre um projecto no ensino de Cálculo. *Zetetiké*, 10, 17/18, 71-112.
- Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. São Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Morgan, C. (1997). The institutionalization of open-ended investigation: Some lessons from the UK experience. In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (pp. 49-62). Helsinki: Department of Teacher Education, University of Helsinki.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e avaliação da Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE. (tradução portuguesa da edição original de 1989).
- National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE. (tradução portuguesa da edição original de 1991).

- Oliveira, H., Ponte, J. P., Santos, L. & Brunheira, L. (1999). Os professores e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 97-110). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.
- Oliveira, H., Segurado, I. & Ponte, J. P. (1998). Explorar, investigar e discutir na aula de matemática. In A. Roque & M. J. Lagarto (Eds.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 207-213). Lisboa: APM.
- Pimenta, S.G., Anastasiou, L. G. C. & Cavallet, V. J. (2003). Docência no ensino superior: construindo caminhos. In A. Neto, J. Nico, J. C. Chouriço, P. Costa & P. Mendes (Orgs.), *Didácticas e Metodologias de Educação* (pp. 357-365). Évora: Departamento Pedagogia e Educação da Universidade de Évora.
- Pirie, S. (1987). *Mathematical Investigations in your classrooms: A pack for teachers*. University of Oxford & University of Warwick.
- Poincaré, H. (1988). Intuição e lógica em Matemática. In *A natureza da Matemática* (pp. 7-16). Lisboa: APM.
- Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 7-14). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of the mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning* (2 vols.). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving* (combined ed.). New York, NY: Wiley. (Pólya (1962) original 62 e 65).
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante*, 3, 1, 3-18.
- Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 119-138). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico.
- Ponte J. P., Brocardo J. & Oliveira H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, M. H. & Segurado, M. I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. & Varandas, J. M. (1998). Investigating mathematical investigations. *Proceedings of CIEAEM 49* (pp. 3-14), Setúbal: Escola Superior de Educação.
- Porfírio, J. & Oliveira, H. (1999). Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 111-117). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

- Rodrigues, J. A. (2003). *Métodos Numéricos: Introdução, Aplicação e Programação*. Lisboa: Sílabo.
- Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: Porquê, o quê e como? In *Avaliação das aprendizagens: Das concepções às práticas* (pp. 77-84). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically. Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouwes (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan.
- Schoenfeld, A. H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates.
- Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J. & Abrantes, P. (1999). O currículo de Matemática e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.
- Spierpinska, A., Trgalová, J., Hillel, J. & Dreyfus, T. (1999). Teaching and learning Linear Algebra with Cabri. *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 1, 119-134.
- Tanner, H. & Jones, S. (1997). Teaching children to think mathematically. In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (pp. 106-119). Helsinki: University of Helsinki.
- Tavares, F. (1998). *A actividade de aplicação e modelação matemática com recurso a ferramentas computacionais: um estudo de caso com alunos do 1º ano do ensino superior*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- Tuckman, B. W. (2002). *Manual de investigação em educação*. 2ª ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Varandas, J. (2000). *Avaliação de investigações matemáticas: Uma experiência* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- Varandas, J. (2003). Avaliação da actividade investigativa: Uso de uma tabela de descritores. *Educação e Matemática*, 74, 74-78.
- Wink, D. (1999). Is teaching instinctive? No, I'm afraid not. *Journal of College Science Teaching*, 28(5), 315-317.
- Yin, R. (2003). *Case study research: design and methods* (3ª ed). London: Sage.

Anexos

Anexo 1 – Planeamento das Actividades Lectivas

Análise Numérica 1º Semestre 2005/2006

Data		Planeamento (Turma 1)
12Set	2ªf	Aula apresentação; Inquérito inicial
16Set	6ªf	Formação grupos trabalho; Introdução à AN; Números
19Set	2ªf	Erros. Análise Intervalar
23Set	6ªf	Tarefa 1 – Erros (Exploração)
26Set	2ªf	Tarefa 1 – Erros (Exploração)
30Set	6ªf	Tarefa 1 – Erros (Discussão); Erros (FFCE)
03Out	2ªf	Números e Erros (exercícios)
07Out	6ªf	Tarefa 2 – Eqs. não lineares (Exploração)
10Out	2ªf	Tarefa 2 – Eqs. não lineares (Exploração)
14Out	6ªf	Tarefa 2 – Eqs. não lineares (Discussão).Eqs. não lineares
17Out	2ªf	Eqs. não lineares (teoria+exercícios)
24Out	2ªf	Tarefa 3 – Ajuste curvas + Interpolação (Exploração)
25Out	3ªf	Tarefa 3 – Ajuste curvas + Interpolação (Discussão)
07Nov	2ªf	Interpolação polinomial (teoria)
11Nov	6ªf	Interpolação polinomial (exercícios)
14Nov	2ªf	Ajuste curvas (teoria+exercícios)
18Nov	6ªf	Ajuste curvas (exercícios)
21Nov	2ªf	Tarefa 4 – Integração numérica (Exploração)
25Nov	6ªf	Tarefa 4 – Integração numérica (Discussão)
28Nov	2ªf	Integração numérica (teoria+exercícios)
05Dez	2ªf	Integração numérica (exercícios)
12Dez	2ªf	Teste final individual
16Dez	6ªf	Entrega final teste; Inquérito final; Balanço da disciplina

Planeamento (Turma 2)	Data	
Aula apresentação; Inquérito inicial	15Set	5 ^{af}
Formação grupos trabalho; Introdução à AN; Números	16Set	6 ^{af}
Erros. Análise Intervalar	22Set	5 ^{af}
Tarefa 1 – Erros (Exploração)	23Set	6 ^{af}
Tarefa 1 – Erros (Exploração)	29Set	5 ^{af}
Tarefa 1 – Erros (Discussão); Erros (FFCE)	30Set	6 ^{af}
Números e Erros (exercícios)	06Out	5 ^{af}
Tarefa 2 – Eqs. não lineares (Exploração)	07Out	6 ^{af}
Tarefa 2 – Eqs. não lineares (Exploração)	13Out	5 ^{af}
Tarefa 2 – Eqs. não lineares (Discussão).Eqs. não lineares (teoria)	14Out	6 ^{af}
Eqs. não lineares (exercícios)	20Out	5 ^{af}
Interpolação polinomial (teoria)	21Out	6 ^{af}
Interpolação polinomial (teoria)	25Out	3 ^{af}
Interpolação polinomial (Exercícios)	27Out	5 ^{af}
Tarefa 3 – Ajuste curvas (Exploração)	03Nov	5 ^{af}
Tarefa 3 – Ajuste curvas (Discussão)	4Nov	6 ^{af}
Ajuste Curvas (teoria + exercícios)	10Nov	5 ^{af}
Ajuste Curvas (exercícios)	11Nov	6 ^{af}
Tarefa 4 – Integração numérica (Exploração)	17Nov	5 ^{af}
Tarefa 4 – Integração numérica (Discussão)	18Nov	6 ^{af}
Integração numérica (teoria+exercícios)	24Nov	5 ^{af}
Integração numérica (exercícios)	25Nov	6 ^{af}
Teste final individual	12Dez	2 ^{af}
Entrega final teste; Inquérito final; Balanço da disciplina	16 Dez	6 ^{af}

Anexo 2 - Tarefa 1

Arte de Marinheiro

A *arte de marinheiro* consiste em saber aparelhar um navio a preceito. No tempo da navegação à vela, saber esta arte equivalia a possuir um diploma de instrução profissional. Ao contrário dos dias de hoje não havia marinheiro que não soubesse todos os segredos sobre cabos e nós.

O aparecimento de nós iguais em partes diferentes do globo leva-nos a concluir que alguns deles foram inventados independentemente. Julga-se que já eram usados na pré-história pelos homens das cavernas. O nó mais antigo que se conhece foi descoberto em 1923 numa turfeira na Finlândia e cientificamente datado de 7200 a.C. Também se sabe que os antigos Gregos, Egípcios e Romanos usavam nós com alguma complexidade nas construções de edifícios, pontes e fortificações pelo que não é lícito julgar que apenas os marinheiros são detentores desta arte. No que respeita ao seu uso na marinha existem registos escritos pelo menos desde o séc. XVII, mas desenhos e figuras mostram que o seu uso é muito anterior a este período.

Nós, voltas, falçaças, mãos, costuras, botões, pontos, pinhas, gachetas e cochins, são alguns dos trabalhos da *arte de marinheiro*. Os nós são usados quando se pretende unir um cabo a outro, ligar os chicotes do mesmo cabo ou fixar um cabo a qualquer objecto (ex: cabeçaço, cunho, etc.). Nem sempre se aprendem pelos livros: fazem-se, desfazem-se e tornam a fazer-se sempre que seja possível.

Como futuros oficiais de Marinha não podem deixar ficar mal o vosso comandante quando este vos pede ajuda em alguns cálculos...

Q1. Tornou-se necessário comprar cabos de amarração, pelo que é preciso escolher, entre três bitolas diferentes, duas que permitam passar dois cabos por uma buzina de 10 cm de diâmetro. Os cabos C1, C2 e C3 têm bitolas, respectivamente, de 4, 5 e 5.5 cm. Tendo em conta que as condições de utilização a que os cabos estão sujeitos (humidade, sol, etc.) podem influenciar em 10% a sua bitola, verifique quais os cabos que poderia escolher.

Q2. Na realização de trabalhos de arte de marinheiro as dimensões dos cabos poderão ter que ser subtraídas, multiplicadas e divididas. Serão capazes de determinar quais os novos limites para a bitola de um cabo resultante das operações acima mencionadas?

Q3. Durante uma navegação foi encontrado um objecto de forma cónica cujo volume pode ser obtido por $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2)$.

Verificou-se que $R = 30 \pm 0.3$ cm, $r = 20 \pm 0.4$ cm e $H = 40 \pm 0.5\%$ cm. Determine um valor aproximado de V e um majorante para o erro, com 2 algarismos relevantes.

Q4. Será possível generalizar o que se passa com as operações elementares para o cálculo de erros para outras funções?...

Duração: 1 aula de 100 minutos para exploração e
1 aula de 50 minutos para discussão em grande grupo

Material: máquina de calcular

Sugestão: Observar com atenção toda a informação disponibilizada e fazer registos de todo o vosso trabalho para vos facilitar a escrita do relatório de grupo.

Anexo 3 - Tarefa 2

Águas Ameaçadas

A poluição das águas é, actualmente, um problema mundial muito preocupante. Lembrem-se, com certeza, do desastre do Prestige, em Novembro de 2002... Com o crescimento do comércio marítimo estas catástrofes têm ocorrido cada vez em maior número.

Já no princípio do séc. XX, com o início do transporte a granel de hidrocarbonetos por via marítima, verificou-se que esta prática comportava alguns riscos. No entanto, só com os primeiros grandes acidentes é que esta questão começou a merecer a atenção e preocupação da opinião pública.

Apesar da poluição das águas poder ser accidental, a maior parte das vezes deriva de produtos lançados, de forma não controlada e de origem diversa (poluição industrial, agropecuária, doméstica, *etc.*) com elevadas quantidades de substâncias químicas e tóxicas e, por isso, extremamente venenosas. Essa água é lançada, directa ou indirectamente, nos rios, ribeiras, lagos, albufeiras e oceanos, onde provoca graves alterações nos ecossistemas, com a morte de muitas espécies animais e vegetais. A recolonização lenta e progressiva do meio aquático só tem início após a dissipação da poluição. O intervalo de tempo necessário à recuperação do ecossistema depende de numerosos factores e varia consoante o caso.

O número de indivíduos de uma população (de determinada espécie) pode ser obtido, durante um período de tempo, pela seguinte função:

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1)$$

Sendo v a taxa anual de imigração, λ a taxa anual de natalidade da população e N_0 o número de indivíduos no instante inicial.

Quando estas catástrofes ocorrem em águas interiores, os efeitos nos ecossistemas são mais graves, devido à dificuldade de renovação e depuração das águas. Foi o que se passou, em 1969, quando uma mancha de óleo flutuante no rio Cuyahoga queima durante horas em Ohio, onde o rio desagua no lago Erie. Os jornais declararam “O lago Erie está morto”.

Investigadores determinaram que, nesse momento, a população de uma espécie de peixe possuía um milhão de indivíduos, 281×10^3 imigraram para a comunidade durante o primeiro ano e ao fim de um ano existiam $1,780 \times 10^6$ indivíduos nessa população.

Q1. Represente graficamente a função $N(t)$ e encontre um intervalo $[a, b]$ que contenha um valor aproximado para a taxa de natalidade da população. Associe-lhe um erro.

Q2. Como varia o erro em função da amplitude do intervalo escolhido?

Q3. Partindo do intervalo escolhido na Q1 como poderá obter aproximações sucessivas (e mais exactas) para o valor da taxa de natalidade da população?

Q4. Será possível generalizar procedimentos de forma a propor um método de aproximação de uma raiz de uma equação não linear?

Duração: 1 aula de 100 minutos para exploração e

1 aula de 50 minutos para discussão em grande grupo

Material: máquina de calcular

Sugestão: Observar com atenção toda a informação disponibilizada e fazer registos de todo o vosso trabalho para vos facilitar a escrita do relatório de grupo.

Anexo 4 - Tarefa 3

Ainda os Lagos...

Através de monitorização, obtiveram-se alguns dados relativos à evolução de uma população de bactérias anaeróbias no lago Erie, com os quais se pretende descrever o crescimento da referida população.

t (horas)	2	3	4	5	6	8
p ($\times 10^5$)	90	150	----	235	----	400

Q1. Como podem verificar houve falhas no registo correspondente a algumas horas. Como completariam a tabela?

Q2. Sugira um modelo matemático que descreva a evolução da população no período considerado.

Q3. Qual seria a previsão do número de indivíduos dessa população para as próximas 2 horas?

Q4. Suspeita-se que a partir da décima hora o crescimento da população segue outro padrão. Verifique se os dados seguintes confirmam a especulação e sugira uma forma de descrever a evolução da população neste novo período.

t (horas)	10	11	12	13
p ($\times 10^5$)	550	710	940	1100

Duração: 1 aula de 100 minutos para exploração e

1 aula de 50 minutos para discussão em grande grupo

Material: máquina de calcular

Sugestão: Observem com atenção toda a informação disponibilizada e façam registos de todo o vosso trabalho para vos facilitar a escrita do relatório de grupo.

Anexo 5 - Tarefa 4

Quem vai para o mar...

Antes de iniciar uma missão, o imediato do navio onde o vosso grupo se encontra tem que garantir que o mesmo transporta água doce suficiente para as necessidades da sua guarnição. Durante uma operação de enchimento mediu-se a taxa do fluxo de água (caudal) para um tanque durante períodos sucessivos de 1 minuto. Os valores estão na tabela seguinte:

Tempo (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q (l/min)	230	300	320	330	320	290	250	200	160	120	90

Q1. Como pode estimar a quantidade de água que entrou no tanque durante o primeiro minuto. E nos cinco primeiros minutos?

Q2. Durante o enchimento houve um alerta e o navio tem de largar no final dos 10 minutos. O imediato sabe que necessitava de encher 2,46 toneladas para garantir as necessidades mínimas sem racionamento, durante esta missão, pelo que pretende conhecer uma aproximação da quantidade de água que entrou no tanque durante esse período. Deve o imediato determinar algum racionamento se a estimação for baseada em dois tempos distintos? E se for baseada em 3?

Q3. Como varia o erro em função dos pontos utilizados na estimação?

Q4. Será possível generalizar procedimentos de forma a propor modelos de integração (ou modelos para o cálculo do valor de um integral)?

Duração: 1 aula de 100 minutos para exploração e

1 aula de 50 minutos para discussão em grande grupo

Material: máquina de calcular

Sugestão: Observem com atenção toda a informação disponibilizada e façam registos de todo o vosso trabalho para vos facilitar a escrita do relatório de grupo.

Anexo 6 – Guião dos Relatórios

Guião para a realização de um relatório (Actividades de Exploração/Investigação)

Durante o próximo semestre vão ser propostas várias tarefas investigativas a realizar nas aulas de Análise Numérica, sobre as quais vão ser solicitados relatórios, elaborados em grupo e em tempo extra-lectivo.

Estes relatórios deverão ser entregues nos prazos definidos pela professora e têm como objectivos:

1. Contribuir para a reflexão e uma melhor compreensão dos assuntos tratados nas aulas, por parte dos alunos;
2. Desenvolver a capacidade de comunicação escrita dando aos alunos oportunidade para apresentar os seus raciocínios e descobertas;
3. Permitir ao professor compreender melhor as dificuldades encontradas, as estratégias utilizadas e os resultados obtidos pelos alunos na realização das tarefas propostas;
4. Desenvolver o sentido crítico dos alunos para uma correcta avaliação do trabalho desenvolvido nas aulas, com vista ao seu futuro aperfeiçoamento.

Não obstante a forma pessoal de apresentação do relatório, este deverá incluir uma descrição clara e completa do trabalho realizado. Assim, na elaboração de um relatório deverão ter em conta os seguintes aspectos:

Apresentação: Título e objectivos do trabalho, incluindo as questões iniciais e identificação dos elementos do grupo.

Exploração/Desenvolvimento: Deverá conter uma descrição detalhada do processo de investigação (incluindo as primeiras decisões, passos sucessivos, questões que foram surgindo, explicitação de raciocínios e estratégias de resolução, resultados que foram obtendo...), ilustrada com os materiais entretanto produzidos (tabelas e/ou esquemas, esboços de gráficos, organização dos dados recolhidos...).

Conclusões: Síntese das descobertas mais significativas durante a realização da tarefa.

Deverão ainda incluir no relatório uma apreciação crítica da tarefa que vos foi apresentada como base de trabalho (compreensão do contexto, se despertou interesse/agrado ou não, as dificuldades encontradas...) e uma auto-avaliação da participação e intervenção do grupo

no trabalho realizado. Esta informação será utilizada apenas no trabalho de investigação pelo que não está sujeita a avaliação.

Os relatórios elaborados constituirão elementos de avaliação e, como tal, serão classificados numa escala de 0-20 e de acordo com uma tabela de descritores. Deverão ter especial atenção ao detalhe na comunicação do trabalho desenvolvido e à correcção dos raciocínios e dos conceitos matemáticos nele envolvidos.

Anexo 7 – Tabela de Descritores

Avaliação dos relatórios das tarefas de exploração/investigação

Dimensões Classificação	Conhecimento Matemático	Estratégias e Processos de Raciocínio	Comunicação
18-20	<ul style="list-style-type: none"> - Identifica objectivos - Inclui definições e conceitos matemáticos envolvidos na situação. - Usa terminologia e notação apropriadas. - Utiliza representações adequadas. - Executa completa e correctamente algoritmos. 	<ul style="list-style-type: none"> - Usa conhecimentos e informação exterior relevantes para o trabalho. - Identifica as variáveis importantes na situação mostrando compreensão de relações entre elas. - Formula questões que orientam/viabilizam uma estratégia de investigação. - Leva a cabo processos de tentativa e erro de forma sistemática. - Formula conjecturas sobre padrões ou relações. - Procura generalizar a partir da experimentação de casos particulares. - Enuncia uma regra geral e tenta demonstrá-la. 	<ul style="list-style-type: none"> - Trabalho bem apresentado. - Descrição/explicação completa, bem organizada e relevante. - Inclui diagramas e exemplos elucidativos e apropriados para a situação. - Comunicação cuidada e muito eficaz.
14-17	<ul style="list-style-type: none"> - Identifica objectivos. - Inclui definições e conceitos matemáticos envolvidos na situação. - Usa quase correctamente terminologia e notação apropriadas. 	<ul style="list-style-type: none"> - Usa alguns conhecimentos e informação exterior relevantes para o trabalho. - Identifica as variáveis importantes na situação mostrando compreensão de relações entre elas. - Formula algumas questões que orientam/viabilizam uma estratégia de investigação. 	<ul style="list-style-type: none"> - Trabalho bem apresentado. - Descrição/explicação completa e organizada. - Inclui alguns diagramas elucidativos e apropriados para a situação. - Comunicação, no geral, eficaz.
	<ul style="list-style-type: none"> - Utiliza representações correctas mas nem sempre adequadas. - Executa algoritmos que podem conter erros de cálculo. 	<ul style="list-style-type: none"> - Leva a cabo processos de tentativa e erro de forma sistemática. - Formula conjecturas sobre padrões ou relações. - Procura generalizar a partir da experimentação de casos particulares. - Tenta enunciar uma regra geral. 	

(continua)

10-13	<ul style="list-style-type: none"> - Identifica algum objectivo. - Inclui algumas definições e conceitos matemáticos envolvidos na situação. - Usa terminologia e notação nem sempre correctas. - Utiliza representações com algumas incorrecções. - Executa algoritmos que apresentam erros de cálculo. 	<ul style="list-style-type: none"> - Usa conhecimentos e informação exterior com alguma relevância para o trabalho. - Identifica algumas variáveis importantes na situação mas mostra compreensão limitada de relações entre elas. - Procura generalizar a partir da experimentação de casos particulares mas este processo pode estar incompleto ou pouco sistematizado. 	<ul style="list-style-type: none"> - Apresentação razoável. - Descrição/explicação satisfatória mas incompleta e desorganizada. - Argumentação incompleta ou baseada em premissas pouco importantes. - Inclui alguns diagramas pouco claros ou precisos. - Comunicação, no geral, difícil de interpretação.
6-9	<ul style="list-style-type: none"> - Não identifica objectivos. - Mostra uma compreensão muito limitada dos conceitos matemáticos envolvidos na situação. - Troca ou falha o uso dos termos matemáticos. - Executa algoritmos com erros graves de cálculo. 	<ul style="list-style-type: none"> - Não usa conhecimentos e informação exterior ou quando usada, é irrelevante. - A estratégia de procura de padrões ou relações é inadequada ou é difícil de identificar. 	<ul style="list-style-type: none"> - Apresentação razoável. - Descrição/explicação incompleta ou incorrecta. - Argumentação incompleta ou baseada em premissas pouco importantes. - Inclui diagramas pouco claros ou incorrectos. - Comunicação difícil de interpretação.
≤ 5	<ul style="list-style-type: none"> - Não identifica objectivos. - Mostra não compreender os conceitos matemáticos envolvidos na situação. - Não executa algoritmos. 	<ul style="list-style-type: none"> - O trabalho relatado, se existente, é inadequado e/ou irrelevante. 	<ul style="list-style-type: none"> - Apresentação fraca. - Descrição/explicação incompleta ou incorrecta. - Argumentação incompleta e incorrecta. - Não inclui diagramas ou se os apresenta não representam de todo a situação. - Comunicação muito confusa.

Anexo 8 – Questionário Inicial

Pretende-se, com este questionário, fornecer ao professor/investigador dados relativos aos seus alunos no que diz respeito a: concepções da Matemática, hábitos de estudo/trabalho e auto-imagem enquanto aluno de Matemática.

Este questionário é anónimo. Responda-o com seriedade pois só desta forma poderá fornecer indicações úteis ao professor para uma intervenção consciente no sentido de melhorar os resultados obtidos pelos seus alunos.

Para cada uma das seguintes afirmações exprima o seu nível de acordo, assinalando o nível que lhe parece adequado

- 1 - discordo totalmente
- 2 - discordo parcialmente
- 3 - não discordo nem concordo
- 4 - concordo parcialmente
- 5 - concordo totalmente

		1	2	3	4	5
1	A minha relação com a Matemática foi sempre boa					
2	A Matemática que se aprende na escola tem pouco ou nada a ver com o mundo real					
3	Os problemas de Matemática têm uma e uma só resposta correcta					
4	Na Matemática o mais importante não é o cálculo					
5	A maioria dos alunos não pode esperar compreender Matemática mas apenas memorizá-la e aplicar aquilo que aprenderam de um modo mecânico					
6	Nas aulas de Matemática sou estimulado(a) a raciocinar					
7	O papel do professor é transmitir conhecimentos de Matemática e verificar se os alunos os adquiriram					
8	A Matemática é uma actividade sobretudo individual					
9	O papel do aluno é receber conhecimentos de Matemática e demonstrar que os adquiriram					
10	Para estudar prefiro estar só					
11	Muitas vezes estou distraído na aula					
12	Agrada-me participar em debates ou discussões abertas					
13	Cumpro com lealdade as tarefas e as responsabilidades que me são distribuídas quando trabalho em grupo					
14	Não me agrada escrever					
15	Na aula prefiro trabalhar em grupo					
16	Aproveito o aviso das notas baixas para adoptar novos métodos de trabalho					
17	Não costumo reflectir sobre os meus erros e as suas causas para os poder corrigir					
18	Preparo-me com tempo para os momentos de avaliação					
19	Sinto-me motivado para aprender					
20	Tenho dificuldade em relacionar novos temas com as experiências pessoais ou conhecimentos anteriormente adquiridos					
21	O que mais me prejudica nos meus estudos é ter lacunas anteriores					
22	Só consigo aprender Matemática se memorizar os factos					
23	O que mais me prejudica nos meus estudos é a minha falta de memória					
24	Consigo avaliar o que sei sobre os conteúdos da disciplina					
25	No que respeita à matéria que estudo, aprendo depressa					
26	A qualidade do meu trabalho não depende muito das circunstâncias exteriores					
27	Encaro os momentos de avaliação com auto-confiança					

Anexo 9 – Questionário Final

Pretende-se, com este questionário, conhecer a opinião dos alunos sobre a nova metodologia de ensino/aprendizagem utilizada (realização de tarefas de investigação) relativamente aos aspectos considerados no questionário inicial.

Cada uma das seguintes afirmações exprime uma opinião em relação à disciplina de Análise Numérica, em particular no que se refere à introdução de uma metodologia de ensino-aprendizagem diferente. Para cada uma assinale, por favor, o seu nível de acordo.

- 1 – discordo totalmente
- 2 – discordo parcialmente
- 3 – não discordo nem concordo
- 4 – concordo parcialmente
- 5 – concordo totalmente

Este questionário é anónimo e não terá qualquer influência na sua classificação. Responda, por favor, com a máxima sinceridade.

		1	2	3	4	5
1	As indicações dadas pela professora foram suficientes para a realização das tarefas					
2	O tempo disponibilizado para a realização das tarefas foi suficiente					
3	Os assuntos tratados nas tarefas são motivadores					
4	A realização de cada tarefa ajudava-me nas tarefas seguintes					
5	A realização das tarefas ajudou-me a compreender melhor os conteúdos programáticos da disciplina					
6	Houve uma adequada ponderação entre aulas expositivas, de exercícios e de realização de tarefas					
7	Na apresentação oral consigo explicar melhor o que fiz					
8	As indicações dadas pela professora foram suficientes para a realização do relatório de grupo					
9	Os comentários que a professora fez no relatório ajudaram-me a perceber os pontos fortes e fracos do meu trabalho					
10	Os relatórios realizados em grupo permitem à professora avaliar o meu trabalho nestas tarefas					
11	A forma de avaliação das tarefas de investigação foi adequada					
12	O trabalho desenvolvido com esta nova metodologia foi eficaz em termos da minha aprendizagem					
13	Agrada-me a metodologia de ensino utilizada nesta disciplina					
		1	2	3	4	5
14	Os problemas de Matemática têm uma e uma só resposta correcta					
15	Na Matemática o mais importante não é o cálculo					
16	A maioria dos alunos não pode esperar compreender Matemática mas apenas memorizá-la e aplicar aquilo que aprenderam de um modo mecânico					
17	A Matemática que se aprende na escola tem pouco ou nada a ver com o mundo real					
18	O papel do professor é transmitir conhecimentos de Matemática e verificar se os alunos os adquiriram					
19	A Matemática é uma actividade sobretudo individual					
20	O papel do aluno é receber conhecimentos de Matemática e demonstrar que os adquiriram					
21	Agrada-me participar em debates ou discussões abertas					
22	Não me agrada escrever					
23	Na aula prefiro trabalhar em grupo					
24	Não costumo reflectir sobre os meus erros e as suas causas para os poder corrigir					
25	Nas aulas sou estimulado(a) a raciocinar					
26	Tenho dificuldade em relacionar novos temas com as experiências pessoais ou conhecimentos anteriormente adquiridos					
27	Só consigo aprender Matemática se memorizar os factos					
28	Consigo avaliar o que sei sobre os conteúdos da disciplina					

O que pensa da realização de tarefas de investigação na aula de Matemática?

Faça um breve comentário sobre o que lhe agradou mais e o que lhe agradou menos ao longo das aulas em que se realizaram tarefas de investigação?

No que respeita às tarefas de investigação, haveria alterações que gostasse de sugerir?

Relativamente à disciplina de Análise Numérica, no seu todo, há algo mais que gostaria de acrescentar?

Anexo 10 – Guião da entrevista

Este guião serviu de base às entrevistas realizadas a cada um dos dois grupos que constituíram os estudos de caso, após a exploração, discussão e entrega dos relatórios das tarefas propostas. Tinham como propósito compreender melhor o desempenho dos alunos nas propostas de trabalho, ao nível das investigações feitas na aula, do relatório e da aula de discussão e também compreender até que ponto o trabalho do aluno foi influenciado pela professora e pelos colegas.

(1) Exploração da tarefa

- Qual a vossa opinião acerca da tarefa? O assunto tratado foi motivador?
- Achem que o tempo disponibilizado para a realização da tarefa foi suficiente?
- As indicações dadas pela professora foram suficientes para a realização da tarefa?
- Como interpretam o que é pedido na tarefa?
- Considera que as tarefas são exercícios? Quais as diferenças principais que verificam?
- Vão formulando questões que procuram responder? Quais?
- Quais as estratégias de resolução que usam?
- Inventam procedimentos originais?
- Recorrem ao manual escolar muitas vezes? Com que propósito?
- Tentam demonstrar as v/ conjecturas? Como?
- Como registam ou representam no papel aquilo que pensam?
- Como trabalham em grupo? Há partilha de ideias? Questionam as ideias dos outros? Defendem as suas próprias ideias tentando convencer os outros?
- Achem que a professora vos ajudou na investigação? De que forma?
- Quais foram as principais dificuldades sentidas na tarefa?

(2) Discussão

- Como vêm a aula de discussão da tarefa? O que surge de novo nesta fase?
- Com a apresentação oral conseguiram explicar melhor o que tinham feito?
- O que acham que a gestão da participação dos alunos? Achem que todos os alunos tiveram a mesma oportunidade para apresentar as suas conclusões?
- Os comentários que a professora fez na apresentação oral ajudaram-vos a perceber melhor os pontos fortes e fracos do vosso trabalho?

(3) Relatório

- As indicações dadas pela professora foram suficientes para a realização do relatório de grupo?
- Achem que o relatório realizado em grupo permite à professora avaliar o vosso trabalho nesta tarefa? Será que o relatório espelha bem todo o trabalho realizado?
- Os comentários da professora ao relatório ajudou-vos a perceber melhor os pontos fortes e fracos do vosso trabalho e na realização dos seguintes?
- Achem que o trabalho de grupo vos ajudou na investigação? De que forma?
- Gostariam de acrescentar...

impressão e encadernação
REPRO 2000
CENTRO DE CÓPIAS
FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA
Tel. 21 758 55 04 Fax 21 757 76 52 e-mail: repro2000@sapo.pt